

## فضای حقیقی $n$ -بعدی

ریاضیات کلاسیک بر دو رکن اساسی "عدد" و "فضا" بنا شده است. علوم حساب و جبر از عدد نشأت می‌گیرند و هندسه، به مفهوم سنتی آن، علم فضا و اشکال و اجسام موجود در فضا است. بسیاری اوقات می‌توان با یک پدیده دو برخورد متمایز ریاضی، یکی جبری-عددی، و دیگری هندسی، داشت. در برخورد جبری یک چارچوب نمادین ارائه می‌شود که اغلب برای حل مسائل دیگری نیز قابل استفاده است و گاهی نیز منجر به فراهم ساختن یک الگوریتم یا دستورالعمل زنجیره‌ای برای حل این‌گونه مسائل می‌شود. در برخورد هندسی، که ریشه در نیروی باصره انسان دارد، سعی بر این است که جمیع روابط موجود بین اجزاء پدیده یکجا جمع گردند، خصوصیات برجسته شناسایی شوند، و حل مسأله از این مشاهدات دیده شود. به ذکر دو مثال ابتدایی می‌پردازیم:

مثال ۱. می‌خواهیم ثابت کنیم مجموع هر تعداد عدد فرد متوالی که از ۱ شروع شود یک مجذور کامل است. در واقع:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2 \quad (1)$$

یک روش جبری-عددی برای اثبات این ادعا، استقراء است. حکم برای  $n = 1$  صحیح است و اگر فرض کنیم (۱) برای  $n$  برقرار است، نشان می‌دهیم برای  $(n + 1)$  نیز برقرار است:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) + (2n + 1) = n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2$$

و حکم به اثبات می‌رسد.

برخورد هندسی با هممین حکم در شکل ۱ دیده می‌شود. توجه کنید که اعداد فرد به صورت لایه‌هایی از گوشه‌چپ پایین افزوده می‌شوند و همواره یک مربع به ضلع  $n$  پدید می‌آید:

شکل ۱

مثال ۲. می‌خواهیم در مورد تعداد جواب‌های دستگاه دو معادله دو مجهولی زیر بحث کنیم:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x^2 + y^2 + x + y = 4 \end{cases} \quad (2)$$

نخست مسئله را از دیدگاه جبری بررسی می‌کنیم. با تفریق دو رابطه داریم  $x + y = 2$ . اگر  $y = 2 - x$  را در معادله اول جایگزین کنیم نتیجه می‌شود که  $2x^2 - 4x + 2 = 0$  یا  $x^2 - 2x + 1 = 0$ ، پس  $x = 1$ . با جایگزینی در معادله اول داریم  $y = \pm 1$  ولی فقط جواب  $y = 1$  در معادله دوم صدق می‌کند، پس تنها جواب مسئله  $(x, y) = (1, 1)$  است. یک دیدگاه هندسی برای بررسی این مسئله می‌تواند توجه به مکان هندسی دو معادله در صفحه  $xy$  باشد. دستگاه را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ (x + \frac{1}{4})^2 + (y + \frac{1}{4})^2 = \frac{9}{4} \end{cases}$$

معادله اول دایره‌ای به شعاع  $\sqrt{2}$  به مرکز  $(0, 0)$  را نمایش می‌دهد و معادله دوم، معادله یک دایره به شعاع  $\frac{3}{4} = \sqrt{2} + \frac{1}{4}$  به مرکز  $(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$ . حال فاصله مرکز دایره‌ها برابر  $\frac{1}{4}$  است، پس تنها نقطه دایره اول به فاصله  $\frac{3}{4}$  از مرکز دایره دوم، نقطه  $(1, 1)$  است، که تنها جواب مسئله می‌باشد.

توجه کنید که هرچند در راه حل هندسی نیز عملیات جبری انجام شد، لیکن این عملیات در راستای هدف‌های خاص هندسی بودند که شناخت شکل مدور مکان‌های هندسی القاء می‌کرد. برای اشکال نامأنوس یا وقتی که مقایسه طول شعاع‌ها و فواصل آسان نباشد، تحلیل جبری اجتناب‌ناپذیر است، ولی هرجا که دیدگاه هندسی مقدور باشد، معمولاً یک بینش یا تعبیر روشن‌کننده ایجاد می‌شود. نکته مهم دیگر در مورد مسئله بالا این که تعداد متغیرهای مسئله در اینجا ۲ است که بررسی هندسی آن را در صفحه  $xy$  ممکن می‌سازد. برای مسائل سه متغیری نیز می‌توان از تجسم هندسی

بهره جست. اما در بسیاری مسائل ریاضی و کاربردی، تعداد متغیرهای ذی دخل بیش از ۳ است که ظاهراً مانعی چاره‌ناپذیر در راه ارائه دیدگاه هندسی است زیرا که انسان به عنوان موجود سه بعدی هیچ گونه برداشت ادراکی مستقیم از ابعاد بالاتر از سه ندارد. یک هدف مهم ما در این جلسه و چند جلسه آینده فراهم آوردن نوعی هندسه  $n$ -بعدی است که در آن  $n$  به اعداد کوچکتر یا مساوی ۳ محدود نباشد. این هندسه را می‌توان یک زبان ریاضی مناسب برای تعمیم شهود هندسی به فرای ابعاد ۲ و ۳ تلقی کرد که همانند نیروی باصره در سوق دادن تفکر ریاضی به یافتن روش مناسب برای حل مسائل کارساز است. در اینجا هیچ‌گونه ادعایی برای "وجود" فیزیکی فضای  $n$ -بعدی مطرح نیست، بلکه یک نظام دقیق ریاضی مطرح خواهد شد که بستر مناسبی برای نوعی تجسم و شهود، هرچند مجازی و نمادین، در ابعاد بالاتر از ۳ است.

رهنمود ما برای ساختن فضای  $n$ -بعدی ارتباط جبر و هندسه در هندسه تحلیلی است. دیده‌ایم که اولین ارتباط جبر و هندسه از نسبت دادن یک عدد (یعنی "طول") به پاره‌خط‌ها آغاز می‌شود، یعنی در تناظر قرار دادن نقاط یک خط راست با مجموعه اعداد حقیقی،  $\mathbb{R}$ . در هندسه تحلیلی، نقاط یک صفحه با زوج‌های مرتب اعداد حقیقی، یعنی عناصر  $\mathbb{R}^2$ ، و نقاط فضا با سه‌تایی‌های مرتب اعداد حقیقی، یعنی عناصر  $\mathbb{R}^3$ ، مدرج می‌شوند. تا اینجا جبر و هندسه مستقل از یکدیگر در ذهن ما وجود دارند و هندسه تحلیلی یک پل ارتباطی است. برای  $n \geq 4$ ،  $n$ -تایی‌های مرتب اعداد حقیقی معنی دارند ولی هندسه‌ای فرای فضای عادی سه بعدی نمی‌شناسیم. با الهام گرفتن از ارتباط فوق برای  $n \leq 3$ ، مفاهیم هندسی را برای  $\mathbb{R}^n$ ، یعنی مجموعه  $n$ -تایی‌های مرتب اعداد حقیقی، تعریف می‌کنیم. به این ترتیب نوعی هندسه در  $\mathbb{R}^n$  بنا می‌شود.

با این مقدمه،  $\mathbb{R}^n$ ، مجموعه  $n$ -تایی‌های مرتب اعداد حقیقی، یعنی اشیاء ریاضی  $x_i \in \mathbb{R}$ ،  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  را در نظر می‌گیریم و هرچنین  $x$  را یک نقطه  $\mathbb{R}^n$  می‌نامیم. نخست یک عمل جمع در  $\mathbb{R}^n$  مشابه جمع بردارها در  $\mathbb{R}^2$  و  $\mathbb{R}^3$  تعریف می‌کنیم. برای  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  و  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \quad (۳)$$

### (۱-۱) خواص جمع

(۱-۱-۱) خاصیت تعویض پذیری (جابجایی):  $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$ .

(۱-۱-۲) خاصیت شرکت پذیری  $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$ .

(۱-۱-۳) عنصر بی اثر:  $n$  تایی  $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$  (یگانه عنصر) دارای ویژگی زیر است:

$$\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x}$$

(۱-۱-۴) عنصر قرینه: برای  $n$  تایی داده شده  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ،  $n$  تایی  $-\mathbf{x}$  که به صورت

$-\mathbf{x} = (-x_1, \dots, -x_n)$  تعریف می شود (یگانه عنصر) دارای ویژگی زیر است:

$$\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = (-\mathbf{x}) + \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

خواص فوق همه به سادگی از تعریف نتیجه می شوند.

تعریف جمع  $n$  تایی ها و خواص بالا عیناً از حالت دو بعدی و سه بعدی برگرفته شده اند. اگر به نقاط  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  و  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$  در  $\mathbb{R}^3$ ، بردارهای ساطع از  $\mathbf{0}$  به این نقاط را منسوب کنیم،  $\mathbf{x} + \mathbf{y}$  مفهوم مجموع برداری معمول را دارد یعنی رأس چهارم متوازی الاضلاعی که سه رأس دیگر آن نقاط  $\mathbf{0}$ ،  $\mathbf{x}$  و  $\mathbf{y}$  هستند.

### شکل ۳

برای بردارها در صفحه و فضای سه بعدی، حاصل ضرب یک عدد حقیقی در بردار نیز تعریف شده است. این عمل را می توان در  $\mathbb{R}^n$  نیز تعریف کرد. برای نقطه  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  و عدد حقیقی  $r \in \mathbb{R}$ ، نقطه  $r\mathbf{x}$  به صورت زیر تعریف می شود:

$$r\mathbf{x} = (rx_1, \dots, rx_n) \quad (۴)$$

یعنی همه مؤلفه های  $\mathbf{x}$  در  $r$  ضرب می شوند. تعبیر این عمل در  $\mathbb{R}^2$  و  $\mathbb{R}^3$  را یادآوری می کنیم. اگر بردار واصل از  $\mathbf{0}$  به  $\mathbf{x}$  را در نظر بگیریم،  $r\mathbf{x}$  برداری در همان راستاست که اگر  $r$  مثبت باشد همجهت با  $\mathbf{x}$  و اگر  $r$  منفی باشد در جهت مقابل است.

## شکل ۴

خواص ابتدایی زیر را در مورد ضرب در اعداد و ارتباط آن با عمل جمع ثابت می‌کنیم. همه این احکام نتیجه سراسر است تعریف هستند:

(۱-۲) خواص ضرب در اعداد

$$(۱-۲-۱) \quad 1x = x, x \text{ هر نقطه}$$

$$(۲-۲-۱) \quad \text{اگر } r, s \text{ اعداد حقیقی باشند و } x \text{ یک نقطه، } (rs)x = r(sx)$$

$$(۳-۲-۱) \quad \text{اگر } r, s \text{ اعداد حقیقی باشند و } x \text{ یک نقطه، } (r+s)x = (rx) + (sx)$$

$$(۴-۲-۱) \quad \text{اگر } r \text{ عدد حقیقی باشد و } x, y \text{ دو نقطه، } r(x+y) = (rx) + (ry)$$

با این تعاریف اکنون آماده هستیم مفاهیم هندسه را در  $\mathbb{R}^n$  پیاده کنیم. ساده‌ترین مفهوم هندسی پس از نقطه، "خط راست" است. برای تعریف خط راست در هندسه تحلیلی دو بعدی و سه بعدی راه‌های گوناگون هست. باید تعریفی را مبنا قرار دهیم که بتوان با صرفاً مفاهیم جمع نقاط و ضرب در یک عدد حقیقی آن را بیان کرد، در این صورت چون این مفاهیم در  $\mathbb{R}^n$  معنی دارند همان تعریف را می‌توان در  $\mathbb{R}^n$  اتخاذ کرد. چنین تعریفی از خط راست را می‌توان در  $\mathbb{R}^2$  و  $\mathbb{R}^3$  در نظر گرفت.

فرض کنید  $a$  و  $A$  دو نقطه در  $\mathbb{R}^2$  یا  $\mathbb{R}^3$  باشند به طوری که  $a \neq A$ .  $a$  را به صورت یک نقطه و  $A$  را به صورت یک بردار (ساطع از مبدأ) تصور کنید. چون  $a \neq A$  فرض شده است مضارب حقیقی  $A$  یک راستا تعریف می‌کنند. حال خط راستی را در نظر بگیرید که از  $a$  می‌گذرد و موازی این راستا است. شرط لازم و کافی برای این که یک نقطه روی این خط باشد این است که بتوان آن را به صورت  $a + tA$ ، برای عدد حقیقی مناسب  $t$ ، نوشت (شکل ۵).

## شکل ۵

در تعریف نقاط این خط به شکل  $a + tA$ ، فقط دو عمل ذکر شده، ضرب در عدد حقیقی و جمع، به کار رفته است پس می‌توان آن را مبنا برای تعریف خط راست در  $\mathbb{R}^n$  قرارداد.

(۳-۱) تعریف. فرض کنید  $a, A \in \mathbb{R}^n$ ,  $A \neq \underline{0}$ ، داده شده باشند، در این صورت مجموعه زیر یک خط راست در  $\mathbb{R}^n$  خوانده می‌شود:

$$\langle a; A \rangle = \{a + tA \mid t \in \mathbb{R}\} \quad (5)$$

$\langle a; A \rangle$  را به مناسبت مقدمه بالا اصطلاحاً خط راست گذرا از  $a$  به موازات  $A$  نیز می‌نامیم هرچند که هنوز مفهوم "موازی" تعریف نشده است. بدین ترتیب هر نقطه  $x = (x_1, \dots, x_n)$  از مجموعه بالا باید به شکل زیر باشد:

$$\begin{aligned} x &= a + tA \\ (x_1, \dots, x_n) &= (a_1, \dots, a_n) + t(A_1, \dots, A_n) \\ &= (a_1 + tA_1, \dots, a_n + tA_n) \end{aligned}$$

پس برای  $a$  و  $A$  داده شده، خط راست  $\langle a; A \rangle$  متشکل از نقاط  $x = (x_1, \dots, x_n)$  به شکل زیر است:

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + tA_1 \\ \vdots \\ x_n = a_n + tA_n \end{cases} \quad (6)$$

که در اینجا  $t$  همه مقادیر حقیقی را اتخاذ می‌کند. (۶) را نمایش پارامتری خط راست  $\langle a; A \rangle$  نیز می‌نامند. توجه کنید که هر خط راست، به مفهوم تعریف شده، همان طور که انتظار می‌رود، در تناظر یک به یک با اعداد حقیقی است. هر نقطه  $\langle a; A \rangle$ ، به شکل  $a + tA$ ، یعنی متناظر با  $t$  است، و این  $t$  منحصر به فرد است زیرا که اگر  $a + tA = a + t'A$ ، با جمع کردن " $-a$ " با دو طرف نتیجه می‌شود که  $tA = t'A$  و  $(t - t')A = \underline{0}$ . حال چون  $A \neq \underline{0}$  فرض شده است، لزوماً  $t - t' = 0$  یا  $t = t'$ .

مثال (محورهای مختصات).  $n$  تایی‌های  $e_1, \dots, e_n$  را به شکل زیر در نظر می‌گیریم:

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0) \quad , \quad e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0) \quad , \dots \quad , \quad e_n = (0, \dots, 0, 1)$$

بدین ترتیب  $e_i$  آن  $n$  تایی است که مؤلفه  $i$  ام آن ۱ و سایر مؤلفه‌هایش صفر است. حال

$$\langle \underline{0}; e_i \rangle = \{(0, \dots, 0, t, 0, \dots, 0) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

یک خط راست است که محور مختصاتی  $i$ -ام یا محور  $x_i$  خوانده می‌شود. تعداد محورهای مختصات در  $\mathbb{R}^n$  برابر  $n$  است.

اگر  $l = \langle a; A \rangle$  یک خط راست باشد، خط راست  $\langle \underline{0}; A \rangle$  را انتقال یافته  $l$  به مبدأ می‌نامیم و با نمادهای  $l^\circ$  یا  $\langle A \rangle$  نیز نمایش می‌دهیم. داریم

$$l^\circ = \langle A \rangle = \{tA \mid t \in \mathbb{R}\}$$

(۴-۱) گزاره. برای هر  $B \in l^\circ$  که  $B \neq \underline{0}$  و هر  $b \in l$  داریم:

$$\langle b; B \rangle = \langle a; A \rangle$$

اثبات. اگر  $B \in l^\circ$ ،  $B \neq \underline{0}$ ، داریم  $B = t_0 A$  برای عدد حقیقی مناسب  $t_0 \neq 0$ ، و اگر  $b \in l$ ،  $b = a + t_1 A$  برای عدد حقیقی مناسب  $t_1$ ، پس برای هر عنصر  $b + sB$ ،  $s \in \mathbb{R}$ ، در  $\langle b; B \rangle$  داریم:

$$b + sB = a + t_1 A + s(t_0 A) = a + (t_1 + st_0)A$$

پس  $\langle b; B \rangle \subset \langle a; A \rangle$ . بالعکس اگر نقطه‌ای  $a + tA$  در نظر بگیریم، می‌توان  $t = t_1 + st_0$  را برای  $s$  حل کرد چون فرض کرده‌ایم  $t_0 \neq 0$  و هر نقطه  $\langle a; A \rangle$  به  $\langle b; B \rangle$  متعلق است. پس  $\langle a; A \rangle \subset \langle b; B \rangle$ .  $\square$

حال این سؤال را مطرح می‌کنیم که مفهوم "خط راست" به صورتی که تعریف شد تا چه حد به خط راستی که در فضای مائوس سه بعدی می‌شناسیم نزدیک است؟ از آنجا که خط راست در  $\mathbb{R}^3$  واقع انتقال یافته همه مضارب حقیقی یک  $A$  ثابت به وسیله یک بردار ثابت  $a$  است، انتظار داریم همان خواص اساسی برقرار باشند. به عنوان نمونه یک انتظار ابتدایی را ثابت می‌کنیم:

(۵-۱) گزاره. دو خط راست که دو نقطه مشترک متمایز داشته باشند بر هم منطبقند.

اثبات. فرض کنید  $\langle a; A \rangle$  و  $\langle b; B \rangle$  دو خط راست باشند، و  $P \neq Q$  دو نقطه که متعلق به هر دو خط است. طبق (۴-۱)  $\langle a; A \rangle = \langle P; A \rangle$  و  $\langle b; B \rangle = \langle P; B \rangle$  چون  $P$  روی هر دو خط قرار دارد، پس:

$$Q = P + tA \quad \text{برای } t \in \mathbb{R} \text{ مناسب}$$

$$Q = P + sB \quad \text{برای } s \in \mathbb{R} \text{ مناسب}$$

پس  $tA = sB$ . ضمناً  $s \neq 0$  و  $t \neq 0$  زیرا که فرض کرده‌ایم  $P \neq Q$ . بنابراین از  $tA = sB$  نتیجه می‌گیریم که  $B$  مضربی ناصفر از  $A$  است. طبق (۴-۱) خط راست  $\langle a; A \rangle = \langle P; A \rangle$  برابر می‌شود با  $\langle P; B \rangle$  که همان  $\langle b; B \rangle$  است و حکم به اثبات می‌رسد.  $\square$

دو خط راست  $l_1, l_2$  را موازی می‌نامیم در صورتی که نقطهٔ مشترک نداشته باشند و انتقال یافته آنها به مبدأ یکی باشد،  $l_1^\circ = l_2^\circ$ . بنابراین برای هر خط  $l$  که از  $o$  نگذرد،  $l$  موازی  $l^\circ$  است. توازی دو خط  $l_1, l_2$  را به  $l_1 \parallel l_2$  نمایش می‌دهیم.

نمایش دیگری برای خطوط راست نمایش متقارن است که بدین صورت به دست می‌آید. اگر هر یک از روابط (۶) را برای  $t$  حل کرده نتایج را برابر قرار دهیم، حاصل می‌شود:

$$\frac{x_1 - a_1}{A_1} = \frac{x_2 - a_2}{A_2} = \dots = \frac{x_n - a_n}{A_n} \quad (7)$$

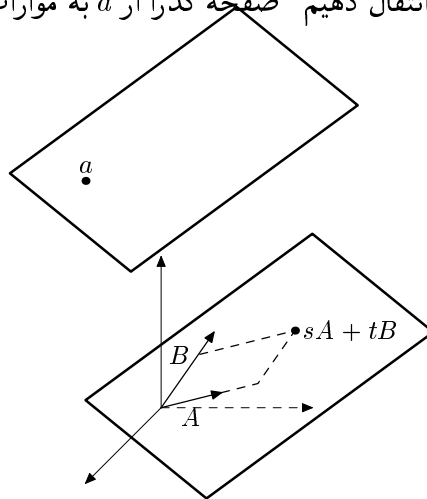
از آنجا که فرض شده است  $0 \neq A$ ، همهٔ  $A_i$  ها نمی‌توانند صفر شوند. صفر شدن بعضی  $A_i$  ها در (۷) به منزلهٔ تقسیم بر صفر نیست، بلکه اگر به (۶) نگاه کنیم می‌بینیم که  $A_i = 0$  به معنی این است که  $x_i$  ثابت و همواره برابر  $a_i$  می‌باشد.

مثال. فرض کنید  $0 \neq A_1$  و  $0 = A_2 = \dots = A_n$ . در این صورت  $A = (A, 0, \dots, 0)$ ، یعنی  $A$  متعلق به محور  $x_1$  است. نتیجه این که خط راست  $\langle a; A \rangle$  یا موازی محور  $x_1$  است یا خود آن است. به همین ترتیب اگر  $0 \neq A_j$  و سایر  $A_i$  ها صفر باشند، خط  $\langle a; A \rangle$  موازی محور  $x_j$  یا منطبق بر آن خواهد بود.



## زیرفضاهای مستوی (۱)

در جلسه قبل مفهوم نقطه و خط راست را که ابتدایی‌ترین مفاهیم هندسه‌اند در  $\mathbb{R}^n$  در نظر گرفتیم. گام بعدی ما تعریف یک "صفحه راست" (یا به طور خلاصه "صفحه") در  $\mathbb{R}^n$  است ( $n \geq 2$ ). یادآوری می‌کنیم که "خط گذرا از  $a$  به موازات  $A$ "،  $A \neq \mathbf{0}$ ، این گونه تعریف شد که نخست مضارب حقیقی  $A$  را در نظر گرفتیم، که یک "خط گذرا از  $\mathbf{0}$  در راستای  $A$ " تشکیل می‌دهند، و سپس با انتقال این خط با مقدار ثابت  $a$ ، "خط گذرا از  $a$  به موازات  $A$ " به دست آمد. برای تعریف صفحه به طریق مشابه عمل می‌کنیم. فرض کنید  $A, B$  دو  $n$  تایی ناهمراستا باشند یعنی هیچ‌یک مضرب حقیقی دیگری نباشد. نخست مجموعه نقاط به شکل  $sA + tB$  را در نظر می‌گیریم. تصور شهودی ما از این مجموعه، صفحه گذرا از مبدأ و شامل نقاط  $A$  و  $B$  است. توجه کنید که به ازای  $s = t = 0$ ، مبدأ به دست می‌آید، به ازای  $s = 1, t = 0$ ، نقطه  $A$  و به ازای  $s = 0, t = 1$ ، نقطه  $B$ . حال اگر نقطه‌ای  $a$  در نظر بگیریم و همه نقاط این مجموعه را به اندازه  $a$  انتقال دهیم "صفحه گذرا از  $a$  به موازات  $A$  و  $B$ " حاصل می‌شود.



بدین ترتیب تعریف می‌کنیم

$$\langle a; A, B \rangle = \{a + sA + tB \mid s, t \in \mathbb{R}\} \quad (1)$$

این مجموعه را صفحه گذرا از  $a$  به موازات  $A$  و  $B$  می‌نامیم.

مثال ۱ (صفحات مختصاتی). در  $\{1, \dots, n\}$  به تعداد  $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$  زوج اندیس  $\{i, j\}$ ،  $i \neq j$  وجود دارد. به ازای هر مجموعه  $\{i, j\}$

$$\{se_i + te_j \mid s, t \in \mathbb{R}\}$$

یک صفحه مختصاتی در  $\mathbb{R}^n$  است.

اگر  $E$  یک صفحه در  $\mathbb{R}^n$  باشد،  $E = \langle a; A, B \rangle$ ،  $E^\circ$  یا انتقال یافته  $E$  به مبدأ را به صورت

$$E^\circ = \langle \underline{0}; A, B \rangle$$

تعریف می‌کنیم. گاهی به جای  $\langle \underline{0}; A, B \rangle$  می‌نویسیم  $\langle A, B \rangle$ . اگر  $E_1$  و  $E_2$  هر یک خط یا صفحه باشد،  $E_1$  و  $E_2$  را موازی می‌نامیم و می‌نویسیم  $E_1 \parallel E_2$  مشروط بر این که اشتراک  $E_1$  و  $E_2$  تهی باشد و به علاوه:

$$E_2 \subset E_1 \quad \text{یا} \quad E_1 \subset E_2$$

مثال ۲. اگر  $E$  یک صفحه در  $\mathbb{R}^n$  باشد و  $\underline{0} \notin E$  نشان می‌دهیم  $E \parallel E^\circ$ . باید نشان دهیم  $E$  و  $E^\circ$  نقطه مشترک ندارند. فرض کنید  $E = \langle a; A, B \rangle$ ، پس  $E^\circ = \langle \underline{0}; A, B \rangle$ . اگر نقطه مشترکی وجود داشته باشد، مثلاً  $P$ ، آنگاه  $P = a + s_1A + t_1B$  برای  $s_1$  و  $t_1$  مناسب، و نیز  $P = s_2A + t_2B$  برای  $s_2$  و  $t_2$  مناسب، پس  $a + s_1A + t_1B = s_2A + t_2B$  یا

$$a = (s_2 - s_1)A + (t_2 - t_1)B \quad (2)$$

در نتیجه می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} \underline{o} &= (s_2 - s_1)A + (t_2 - t_1)B + (s_1 - s_2)A + (t_1 - t_2)B \\ &= a + (s_1 - s_2)A + (t_1 - t_2)B \end{aligned}$$

یعنی  $\underline{o} \in E$  که خلاف فرض است.

مثال ۳. اگر  $E = \langle a; A, B \rangle$  یک صفحه باشد،  $b \notin E$  و  $L = \langle b; B \rangle$ ، آنگاه خط  $L$  با صفحه  $E$  موازی است زیرا که اولاً  $E^\circ = \langle \underline{o}; A, B \rangle \subset \langle \underline{o}; B \rangle = L^\circ$ ، و ثانیاً نشان می‌دهیم  $L$  و  $E$  نقطه مشترک ندارند. فرض کنید  $P$  یک نقطه مشترک باشد، پس  $P = b + tB$  و نیز  $P = a + s_1A + t_1B$ ،

بنابراین

$$b + tB = a + s_1A + t_1B$$

$$b = a + s_1A + (t_1 - t)B$$

یعنی  $b \in E$  که خلاف فرض است.

مثال ۴. در  $\mathbb{R}^3$ ، اگر دو صفحه نقطه مشترک نداشته باشند، لزوماً موازی‌اند. این وضعیت در  $\mathbb{R}^n$ ، برای  $n \geq 4$ ، لزوماً حاکم نیست، یعنی دو صفحه فاقد نقطه مشترک ممکن است موازی نباشند! مثال زیر را در  $\mathbb{R}^4$  در نظر بگیرید:

$$E_1 = \langle \underline{o}; e_1, e_2 \rangle \quad , \quad E_2 = \langle e_4; e_1, e_3 \rangle$$

$E_1$  متشکل از نقاط به شکل  $(s, t, 0, 0)$  است و  $E_2$  متشکل از نقاط به صورت  $(s', 0, t', 1)$ . بدیهی است که  $E_1$  و  $E_2$  نقطه مشترک ندارند زیرا که مؤلفه چهارم هر عنصر  $E_1$  صفر است و مؤلفه چهارم هر عنصر  $E_2$  برابر ۱ می‌باشد. حال اگر  $E_1$  و  $E_2$  را به مبدأ منتقل کنیم، داریم

$$E_1^\circ = E_1 = \{(s, t, 0, 0) \mid s, t \in \mathbb{R}\} \quad , \quad E_2^\circ = \{(s', 0, t', 0) \mid s', t' \in \mathbb{R}\}$$

که نه  $E_1^\circ$  زیرمجموعه  $E_2^\circ$  است و نه بالعکس، پس  $E_1$  و  $E_2$  در تعریف توازی صدق نمی‌کنند. دو صفحه در  $\mathbb{R}^n$ ،  $n \geq 4$ ، را که نه نقطه مشترک داشته باشند و نه موازی باشند، دو صفحه متنافر می‌نامیم.

در اینجا می‌توان گزاره‌هایی مشابه گزاره‌های (۱-۴) و (۱-۵) جلسه قبل ثابت کرد به این مضمون که:

(۱) اگر  $E = \langle a; A, B \rangle$ ،  $C$  و  $D$  دو عنصر ناهمراستای  $E^\circ$  باشند و  $b \in E$ ، آنگاه  $E = \langle b; C, D \rangle$ .

(۲) اگر  $P, Q, R$  سه نقطه متمایز و ناهمراستای مشترک بین دو صفحه  $E_1$  و  $E_2$  باشند، آنگاه  $E_1 = E_2$ .

چون به زودی احکام کلی‌تری ثابت خواهیم کرد در حال حاضر اثبات این دو حکم را به دانشجویان واگذار می‌کنیم و به معرفی مفاهیم جدیدی فرای خط و صفحه می‌پردازیم. تصور ذهنی ما از خط و صفحه، اشکال مسطح "یک بعدی" و "دو بعدی" است. هنوز تعریفی دقیق از کلمه "بعد" ارائه نکرده‌ایم و لیکن می‌دانیم که نقاط خط با یک پارامتر  $t$  در مجموعه  $\{a + tA \mid t \in \mathbb{R}\}$  مدرج می‌شوند و نقاط یک صفحه با دو پارامتر  $s, t$  در مجموعه  $\{a + sA + tB \mid s, t \in \mathbb{R}\}$ . به طور شهودی می‌توان تعداد پارامترهای حقیقی مستقل لازم برای تمیز دادن نقاط یک مجموعه را "بعد" آن مجموعه تلقی کرد. این مفهوم را به طور دقیق‌تر ضمن معرفی "زیرفضاهای مستوی  $k$ -بعدی در  $\mathbb{R}^n$ "،  $k \leq n$ ، که تعمیم خط و صفحه به عنوان "اشیاء مسطح  $k$ -بعدی" خواهند بود، بررسی خواهیم کرد.

فرض کنید می‌خواهیم در  $\mathbb{R}^n$ ،  $n \geq 3$ ، تعریفی برای اشیاء سه‌بعدی مسطح مشابه خط و صفحه دو بعدی تعریف کنیم. طبیعی است که نخست مجموع‌های به شکل  $rA + sB + tC$ ،  $r, s, t$  اعداد حقیقی را در نظر بگیریم که در آن  $A, B$  و  $C$  سه تایی هستند. سپس اگر  $a \in \mathbb{R}^n$  داده شده باشد، مجموعه انتقال یافته، یعنی  $\{a + rA + sB + tC \mid r, s, t \in \mathbb{R}\}$  را "یک زیرفضای سه‌بعدی" در  $\mathbb{R}^n$  تلقی کنیم. نکته قابل توجه این که در مورد خط راست فرض کردیم  $A \neq \underline{0}$  که در غیر این صورت مجموعه  $\{a + tA \mid t \in \mathbb{R}\}$  به یک تک نقطه  $\{a\}$  مبدل می‌شود. همین‌طور در مورد صفحه، فرض ناهمراستا بودن  $A$  و  $B$  را اعمال کردیم که در غیر این صورت مجموعه  $\{a + sA + tB \mid s, t \in \mathbb{R}\}$  به یک خط راست یا حتی یک نقطه (وقتی  $A = B = \underline{0}$ ) مبدل می‌شود. حال می‌خواهیم شرطی مناسب برای سه تایی (یا حتی به طور کلی  $k$ ، تایی) بیابیم که تعمیم طبیعی صفر نبودن  $A$  در  $\{A\}$  و ناهمراستا بودن  $A$  و  $B$  در  $\{A, B\}$  باشد.

(۲-۱) تعریف. فرض کنید  $A_1, \dots, A_k$  عناصر  $\mathbb{R}^n$  باشند. مجموعه  $\{A_1, \dots, A_k\}$  را مستقل خطی می‌نامیم در صورتی که هیچ مجموع مضارب حقیقی  $A_1, \dots, A_k$ ، یعنی  $t_1 A_1 + \dots + t_k A_k$ ، صفر نشود مگر این که همه ضرایب  $t_1, \dots, t_k$  صفر باشند. اگر مجموعه  $\{A_1, \dots, A_k\}$  مستقل خطی نباشند، آن را وابسته خطی می‌نامیم. هر مجموع به شکل  $t_1 A_1 + \dots + t_k A_k$  یک ترکیب خطی  $A_1, \dots, A_k$  خوانده می‌شود.

مثال ۱. برای  $k = 1$ ، مجموعه  $\{A\}$  وابسته خطی خواهد بود به شرطی که  $tA = \underline{0}$  بتواند برقرار باشد بدون این که  $t = 0$ . این تنها وقتی میسر است که  $A = \underline{0}$ . پس شرط اعمال شده برای تعریف خط راست  $\langle a; A \rangle$  روی  $A$  (یعنی  $A \neq \underline{0}$ ) معادل این است که  $\{A\}$  مستقل خطی است.

مثال ۲. برای  $k = 2$ ، وابستگی خطی مجموعه دو عنصری  $\{A, B\}$  معادل این است که  $t_1 A + t_2 B = \underline{0}$  بدون این که هر دو  $t_1$  و  $t_2$  صفر شوند. مثلاً اگر  $t_1 \neq 0$ ، آنگاه  $A = -\frac{t_2}{t_1} B$ ، یعنی  $A$  مضربی حقیقی از  $B$  خواهد شد. بدین ترتیب در تعریف صفحه  $\langle a; A, B \rangle$  شرط همراستا نبودن  $A$  و  $B$  را می‌توان بدین صورت بیان کرد که  $\{A, B\}$  مستقل خطی است.

مثال ۳. اگر در مجموعه  $\{A_1, \dots, A_k\}$ ، یک یا بیشتر از  $A_i$  ها  $n$ -تایی صفر،  $\underline{0}$ ، باشد، مجموعه، وابسته خطی می‌شود. مثلاً فرض کنید  $A_j = \underline{0}$ . ضرایب  $t_i$  را این طور در نظر بگیرید:

$$t_i = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

در این صورت  $t_1 A_1 + \dots + t_k A_k = \underline{0}$  بدون این که همه  $A_i$  ها صفر باشند.

(۲-۲) گزاره. شرطی لازم و کافی برای وابستگی خطی  $\{A_1, \dots, A_k\}$  بدین شرح است:

(الف) در حالت  $k = 1$ ،  $\{A_1\}$  وابسته خطی است اگر و تنها اگر  $A_1 = \underline{0}$ .

(ب) در حالت  $k > 1$ ،  $\{A_1, \dots, A_k\}$  وابسته خطی است اگر و تنها اگر بتوان یکی از  $A_i$  ها را به صورت ترکیبی خطی از سایر  $A_i$  ها نوشت.

اثبات. حالت  $k = 1$  در مثال ۱ بالا بررسی شد، فرض کنید  $k \geq 2$ . اگر  $\{A_1, \dots, A_k\}$  وابسته خطی باشد،  $t_1, \dots, t_k$  حقیقی وجود دارند، نه همه صفر، که  $t_1 A_1 + \dots + t_k A_k = \underline{0}$  مثلاً  $t_j \neq 0$ . در این صورت

$$A_j = -\frac{t_1}{t_j} A_1 - \dots - \frac{t_{j-1}}{t_j} A_{j-1} - \frac{t_{j+1}}{t_j} A_{j+1} - \dots - \frac{t_n}{t_j} A_n$$

یعنی  $A_j$  ترکیبی خطی از سایر  $A_i$  ها است.

بالعکس اگر داشته باشیم:

$$A_j = c_1 A_1 + \dots + c_{j-1} A_{j-1} + c_{j+1} A_{j+1} + \dots + c_k A_k$$

با انتقال  $A_j$  به طرف دیگر رابطه داریم

$$c_1 A_1 + \dots + c_{j-1} A_{j-1} - A_j + c_{j+1} A_{j+1} + \dots + c_k A_k = \underline{0}$$

□ و این در حالی است که دست کم یکی از ضرایب (ضریب  $A_j$ ) صفر نیست.

با این مقدمه، زیرفضاهای با بعد بالاتر از ۱ و ۲ در  $\mathbb{R}^n$  به صورت زیر تعریف می‌شود. فرض کنید  $\{A_1, \dots, A_k\}$  یک مجموعه مستقل خطی از عناصر  $\mathbb{R}^n$  باشد و  $a \in \mathbb{R}^n$  یک نقطه داده شده، در این صورت مجموعه زیر یک زیرفضای مستوی  $k$ -بعدی ("زیرفضای مستوی  $k$ -بعدی گذرا از  $a$  به موازات  $A_1, \dots, A_k$ ") خوانده می‌شود:

$$\langle a; A_1, \dots, A_k \rangle = \{a + t_1 A_1 + \dots + t_k A_k \mid t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}\} \quad (3)$$

اگر مجموعه تعریف شده در (۳) را به  $E$  نمایش دهیم، مقصود از  $E^\circ$  (انتقال یافته  $E$  به  $\underline{0}$ )، مجموعه  $\langle \underline{0}; A_1, \dots, A_k \rangle$  است. به طور کلی یک زیرفضای مستوی  $k$ -بعدی که شامل  $\underline{0}$  باشد یک زیرفضای خطی خوانده می‌شود. طبق قرارداد، تنها زیرفضای صفر بعدی تک عنصری  $\{\underline{0}\}$  است، و بدین ترتیب زیرفضاهای مستوی صفر بعدی تک عنصری‌های  $\{a\}$  هستند،  $a \in \mathbb{R}^n$ ، که

از انتقال  $\underline{e}$  به  $a$  به دست می آیند. بدین ترتیب جدول زیر را داریم:

زیرفضای مستوی صفر بعدی  $\longleftrightarrow$  نقطه

زیرفضای مستوی یک بعدی  $\longleftrightarrow$  خط

زیرفضای مستوی دو بعدی  $\longleftrightarrow$  صفحه

:

تعریف زیرفضای  $k$ -بعدی جای تأمل دارد. سؤال‌های متعددی می‌توان این مقطع مطرح کرد. آیا عدد  $k$  به طور منحصر به فرد تعیین می‌شود، یعنی اگر  $\{A_1, \dots, A_k\}$  و  $\{B_1, \dots, B_l\}$  دو مجموعه، هر یک مستقل خطی، باشند، آیا می‌توان رابطه‌ای به شکل  $\langle a; A_1, \dots, A_k \rangle = \langle b; A_1, \dots, A_k \rangle$ ، برای  $a$  و  $b$  مناسب، برقرار ساخت بدون این که  $k = l$ ؟ به چه اعتباری زیرمجموعه‌های  $\langle a; A_1, \dots, A_k \rangle$  را "مسطح" تجسم می‌کنیم؟ همان طور که دو خط راست دارای دو نقطه متمایز مشترک بر هم منطبق می‌شوند، آیا دو زیرفضای مستوی  $k$ -بعدی با  $(k+1)$  نقطه مشترک، لزوماً بر هم منطبق‌اند؟ در باقیمانده این جلسه و جلسه بعد به جواب‌های قاطعی در مورد این گونه سؤال‌ها خواهیم رسید.

(۲-۳) گزاره. فرض کنید  $\{A_1, \dots, A_k\}$  مستقل خطی ست و  $a \in \mathbb{R}^n$ ، در این صورت نمایش عناصر  $\langle a; A_1, \dots, A_k \rangle$  به شکل  $a + t_1 A_1 + \dots + t_k A_k$  منحصر به فرد است.

اثبات. توجه کنید که هر عنصر  $\langle a; A_1, \dots, A_k \rangle$  طبق تعریف به شکل  $a + t_1 A_1 + \dots + t_k A_k$  برای  $t_1, \dots, t_k$  مناسب است. می‌خواهیم ثابت کنیم  $t_1, \dots, t_k$  به طور یگانه تعیین می‌شوند. فرض کنید:

$$a + t_1 A_1 + \dots + t_k A_k = a + t'_1 A_1 + \dots + t'_k A_k$$

از این رابطه نتیجه می‌شود که  $(t_1 - t'_1)A_1 + \dots + (t_k - t'_k)A_k = \underline{e}$ . از آنجا که  $\{A_1, \dots, A_k\}$  مستقل خطی است نتیجه می‌شود که همه ضرایب صفر هستند، پس  $t'_i = t_i$  برای  $i = 1, \dots, k$  و یگانگی ضرایب به اثبات می‌رسد.  $\square$

گزاره فوق نشان می‌دهد هر زیرفضای مستوی  $k$ -بعدی در تناظر یک به یک با مجموعه  $k$ -تایی‌های مرتب  $(t_1, \dots, t_k)$ ، یعنی مجموعه  $\mathbb{R}^k$ ، قرار می‌گیرد، همان طور که خط راست با  $\mathbb{R}$  و

صفحه با  $\mathbb{R}^2$  مدرج می‌شود.

نکته زیر نیز در مورد مفهوم استقلال خطی مکرراً مورد استفاده قرار خواهد گرفت:

(۲-۴) گزاره. اگر مجموعه  $\{A_1, \dots, A_k\}$  مستقل خطی باشد، هر زیرمجموعه ناتهی آن نیز مستقل خطی است. اگر  $\{A_1, \dots, A_k\}$  وابسته خطی باشد، هر مجموعه شامل آن نیز وابسته خطی است.

اثبات. اگر زیرمجموعه‌ای از  $\{A_1, \dots, A_k\}$  وابسته خطی شود، یک ترکیب خطی از اعضای آن زیرمجموعه برابر صفر می‌شود بدون آن که همه ضرایب صفر باشند. اگر سایر  $A_i$  ها را با ضریب صفر به این رابطه بیافزاییم یک رابطه وابسته خطی برای  $\{A_1, \dots, A_k\}$  به دست می‌آید. همین طور اگر یک رابطه وابستگی خطی برای  $\{A_1, \dots, A_k\}$  موجود باشد، همین رابطه، وابستگی خطی برای هر مجموعه شامل  $\{A_1, \dots, A_k\}$  را نشان می‌دهد.  $\square$



## زیرفضاهای مستوی (۲)

در پایان جلسه قبل به تعدادی سؤال بنیادی در مورد تعریف زیرفضای مستوی  $k$ -بعدی اشاره کردیم که قرار شد به پاسخگویی کامل آنها اقدام کنیم. قضیه زیر و روش اثبات آن کلید این بحث است.

(۱-۳) قضیه تبادلی. فرض کنید  $\{A_1, \dots, A_k\}$  و  $\{B_1, \dots, B_l\}$  دو زیرمجموعه مستقل خطی

از عناصر  $\mathbb{R}^n$  باشند به طوری که  $\langle B_1, \dots, B_l \rangle = \langle A_1, \dots, A_k \rangle$  در این صورت  $l = k$ .

اثبات. نشان می‌دهیم  $l \neq k$  منجر به تناقض می‌شود. مثلاً فرض کنید  $k \leq l$ . چون

$$B_1 \in \langle B_1, \dots, B_l \rangle = \langle A_1, \dots, A_k \rangle$$
 می‌توان نوشت:

$$B_1 = t_1 A_1 + \dots + t_k A_k \quad (1)$$

دست کم یکی از ضرایب  $t_1, \dots, t_k$  باید ناصفر باشد چه در غیر این صورت  $B_1 = \mathbf{0}$  و مجموعه  $\{B_1, \dots, B_l\}$  نمی‌تواند مستقل خطی باشد. مثلاً فرض می‌کنیم  $t_1 \neq 0$  (در صورت لزوم اندیس‌ها را تعویض کنید به طوری که ضریب با اندیس ۱ ناصفر باشد)، پس با تبادلی جای  $B_1$  و  $t_1 A_1$  در دو طرف (۱) داریم:

$$-t_1 A_1 = -B_1 + t_2 A_2 + \dots + t_k A_k \quad (2)$$

$$A_1 = \frac{1}{t_1} B_1 - \frac{t_2}{t_1} A_2 - \dots - \frac{t_k}{t_1} A_k$$

از (۲) نتیجه می‌شود که هر ترکیب خطی  $A_1, \dots, A_k$ ، یعنی هر عنصر  $\langle A_1, \dots, A_k \rangle$ ، ترکیبی خطی از  $\{B_1, A_2, \dots, A_k\}$  است. حال عنصر  $B_2 \in \langle B_1, \dots, B_l \rangle = \langle A_1, \dots, A_k \rangle$  را در نظر می‌گیریم.

چون ثابت کرده‌ایم هر عنصر  $\langle A_1, \dots, A_k \rangle$  ترکیبی خطی از  $\{B_1, A_2, \dots, A_k\}$  است، می‌توان نوشت:

$$B_2 = s_1 B_1 + s_2 A_2 + \dots + s_k A_k \quad (3)$$

در اینجا همه ضرایب  $s_2, \dots, s_k$  نمی‌توانند صفر باشند زیرا در این صورت  $B_2 = s_1 B_1$  و مجموعه  $\{B_1, \dots, B_l\}$  وابسته خطی خواهد شد که خلاف فرض قضیه است. پس دست کم یکی از  $s_2, \dots, s_k$  صفر نیست که مثلاً (با تعویض نام اندیس‌ها در صورت لزوم) فرض می‌کنیم  $s_2 \neq 0$ . پس مجدداً با تبادل مکان  $B_2$  و  $s_2 A_2$  داریم:

$$\begin{aligned} -s_2 A_2 &= -s_1 B_1 - B_2 + s_3 A_3 + \dots + t_k A_k \\ A_2 &= -\frac{s_1}{s_2} B_1 - \frac{1}{s_2} B_2 - \frac{s_3}{s_2} A_3 - \dots - \frac{s_k}{s_2} A_k \end{aligned} \quad (4)$$

این رابطه نشان می‌دهد که هر ترکیب خطی  $B_1, A_2, \dots, A_k$  (در نتیجه هر ترکیب خطی  $\langle A_1, \dots, A_k \rangle$ ) ترکیبی خطی از  $\{B_1, B_2, A_3, \dots, A_k\}$  است. به همین روش ادامه داده، تک تک  $A_i$  ها را با  $B_i$  ها مبادله می‌کنیم. از آنجا که  $k \leq l$ ، پس از  $k$  مرحله به این نتیجه می‌رسیم که هر ترکیب خطی  $A_1, \dots, A_k$  یک ترکیب خطی  $B_1, \dots, B_k$  است. از آنجا که  $\langle B_1, \dots, B_l \rangle = \langle A_1, \dots, A_k \rangle$ ، اگر  $l$  اکیداً بزرگتر از  $k$  باشد،  $B_{k+1}$  باید ترکیبی خطی از  $B_1, \dots, B_k$  باشد که این خلاف استقلال خطی  $\{B_1, \dots, B_l\}$  است. نتیجه این که  $l = k$  و حکم به اثبات می‌رسد.  $\square$

قضیه تبادل نشان می‌دهد که اگر یک زیرفضای خطی  $E^\circ$  متشکل از ترکیب‌های خطی یک مجموعه مستقل خطی  $\{A_1, \dots, A_k\}$  باشد، هر مجموعه مستقل خطی دیگر که ترکیب‌های خطی عناصر آن همین مجموعه را ایجاد کند باید دارای دقیقاً  $k$  عضو باشد. بدین ترتیب عدد  $k$ ، که از این پس بعد زیرفضای خطی  $\langle A_1, \dots, A_k \rangle$  خوانده خواهد شد عددی است که به طور ذاتی بر این زیرفضای خطی تحمیل می‌شود. هر زیرمجموعه مستقل خطی  $k$ -عضوی  $\{A_1, \dots, A_k\}$  از عناصر  $E^\circ$  را یک پایه برای  $E$  می‌نامیم. اگر زیرفضای مستوی  $E = \langle a; A_1, \dots, A_k \rangle$  از انتقال زیرفضای

خطی  $\langle A_1, \dots, A_k \rangle$  به دست آمده باشد، بعد  $E$  را نیز  $k$  می‌گیریم. اکنون می‌توانیم گزاره‌ای مشابه (۴-۱) در حالت کلی ارائه کنیم:

(۲-۳) گزاره. اگر  $\{A_1, \dots, A_k\}$  مستقل خطی باشد  $E = \langle a; A_1, \dots, A_k \rangle$ ،  $\{B_1, \dots, B_k\}$  یک مجموعه مستقل خطی از عناصر  $E^\circ = \langle A_1, \dots, A_k \rangle$  باشد، و  $b \in E$ ، آنگاه  $E = \langle b; B_1, \dots, B_k \rangle$ .

اثبات. چون  $b \in E$  داریم

$$b = a + t_1 A_1 + \dots + t_k A_k \quad (5)$$

برای اعداد حقیقی مناسب  $t_1, \dots, t_k$ . از طرفی دیگر دیدیم که هر ترکیب خطی  $\{A_1, \dots, A_k\}$  یک ترکیب خطی  $\{B_1, \dots, B_k\}$  است، و بالعکس. این امر را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} x &= a + s_1 A_1 + \dots + s_k A_k \\ &= b + (s_1 - t_1) A_1 + \dots + (s_k - t_k) A_k \quad (\text{طبق } 5) \end{aligned} \quad (6)$$

و طبق (۶) می‌توان  $(s_1 - t_1) A_1 + \dots + (s_k - t_k) A_k$  را به صورت ترکیبی خطی از  $B_1, \dots, B_k$  نوشت، پس  $x \in \langle b; B_1, \dots, B_k \rangle$ . بالعکس اگر  $y \in \langle b; B_1, \dots, B_k \rangle$ ، آنگاه:

$$y = b + r'_1 B_1 + \dots + r'_k B_k \quad \text{برای اعداد حقیقی مناسب } r'_1, \dots, r'_k$$

ترکیب خطی  $r'_1 B_1 + \dots + r'_k B_k$  را می‌توان طبق (۶) به صورت  $r_1 A_1 + \dots + r_k A_k$  نوشت، پس به کمک (۵):

$$y = a + (t_1 + r_1) A_1 + \dots + (t_k + r_k) A_k$$

یعنی  $y \in \langle a; A_1, \dots, A_k \rangle$  و حکم به اثبات می‌رسد.  $\square$

گزاره زیر نیز مشابه (۱-۵) است:

(۳-۳) گزاره. اگر زیرفضاهای مستوی  $k$ -بعدی  $E_1, E_2$  در  $\mathbb{R}^n$  دارای  $(k+1)$  نقطهٔ مشترک

باشند که در یک زیرفضای با بعد کوچکتر از  $k$  در  $\mathbb{R}^k$  قرار نمی‌گیرند، آنگاه  $E_1 = E_2$ .

اثبات. فرض کنید  $P_0, P_1, \dots, P_k$  نقاط مشترک  $E_1, E_2$  باشند. اگر  $\{A_1, \dots, A_k\}$  یک پایه

برای  $E_1^\circ$  باشد، عناصر  $E_1$  را می‌توان به صورت

$$P_0 + t_1 A_1 + \dots + t_k A_k$$

نمایش داد. حال چون  $P_1, \dots, P_k \in E$ ، هر یک به صورت فوق نوشته می‌شود،

پس  $P_1 - P_0, \dots, P_k - P_0$  هر یک ترکیبی خطی از  $A_1, \dots, A_k$  است. می‌نویسیم

$P'_1 = P_1 - P_0, \dots, P'_k = P_k - P_0$ . حال ادعا می‌کنیم  $\{P'_1, \dots, P'_k\}$  مستقل خطی است. نشان

می‌دهیم فرض وابستگی خطی  $\{P'_1, \dots, P'_k\}$  منجر به تناقض با این فرض گزاره می‌شود که

$P_0, P_1, \dots, P_k$  در یک زیرفضای با بعد کوچکتر از  $k$  جای نمی‌گیرند. اگر  $k = 1$  که در حالت گزاره

(۵-۱) هستیم که قبلاً ثابت شده است، پس فرض می‌کنیم  $k > 1$ . حال فرض کنید  $\{P'_1, \dots, P'_k\}$

وابسته خطی است. دست کم یکی از  $P'_1, \dots, P'_k$  ناصفر است زیرا اگر همهٔ اینها صفر باشند داریم

$P_0 = P_1 = \dots = P_k$  پس  $\{P_0, P_1, \dots, P_k\}$  در یک زیرفضای مستوی صفر بعدی  $\mathbb{R}^n$  قرار می‌گیرد

که خلاف فرض است. بدین ترتیب  $\{P'_1, \dots, P'_k\}$  دارای حداقل یک زیرمجموعهٔ مستقل خطی است

(یک تک عنصری ناصفر). بزرگترین زیرمجموعه (از نظر تعداد اعضا) از  $\{P'_1, \dots, P'_k\}$  را در نظر

می‌گیریم که مستقل خطی است، تعداد اعضای آن را  $l$  می‌نامیم. چنین زیرمجموعهٔ  $\{P'_1, \dots, P'_k\}$

ممکن است منحصر به فرد نباشد ولیکن به هر حال  $l < k$  زیرا  $\{P'_1, \dots, P'_k\}$  وابسته خطی فرض شده

است. با تعویض نام اندیس‌ها در صورت لزوم، فرض می‌کنیم  $\{P'_1, \dots, P'_l\}$  این زیرمجموعهٔ مستقل

خطی (دارای بیشترین تعداد ممکن عضو) باشد. زیرفضای خطی ایجاد شده توسط  $P'_1, \dots, P'_l$  را  $F^\circ$

می‌نامیم،  $F^\circ = \langle P'_1, \dots, P'_l \rangle$ . داریم  $P_{l+1}, \dots, P_k \in F^\circ$  زیرا که افزودن هر یک به  $\{P'_1, \dots, P'_l\}$

وابستگی خطی ایجاد می‌کند.  $F^\circ$  یک زیرفضای خطی  $l$ -بعدی است،  $l \leq k$ ، و اگر آن را با  $P_0$

انتقال دهیم، یک زیرمجموعهٔ مستوی  $l$ -بعدی  $F$  به دست می آید:

$$F = \langle P_0; P'_1, \dots, P'_l \rangle$$

که  $P_0, P_1 = P_0 + P'_1, \dots, P_k = P_0 + P'_k$  همه عضو آن هستند. چون  $l < k$ ، این خلاف فرض گزاره است. نتیجه این که وابستگی خطی  $\{P'_1, \dots, P'_k\}$  منجر به تناقض شد و این مجموعه باید مستقل خطی باشد. بنابراین  $\{P'_1, \dots, P'_k\}$  یک پایه برای  $E_1^\circ$  است و طبق گزاره (۳-۲) داریم

$$E_1 = \langle P_0; P'_1, \dots, P'_k \rangle$$

چون  $P_0, P_1, \dots, P_k \in E_2$ ، عین همین استدلال برای  $E_2$  نیز کار می کند و نتیجه می شود که:

$$E_2 = \langle P_0; P'_1, \dots, P'_k \rangle$$

و  $E_1 = E_2$  نتیجه می شود. □

مفهوم توازی را که برای خط و صفحه تعریف کردیم می توانیم به زیرفضاهای مستوی از هر بعد تعمیم دهیم. فرض کنید  $E_1, E_2$  دو زیرفضای مستوی  $\mathbb{R}^n$  باشند. می گوییم  $E_1, E_2$  موازی هستند، و می نویسیم  $E_1 \parallel E_2$ ، در صورتی که اشتراک  $E_1, E_2$  تهی باشد و برای انتقال یافته های آنها به مبدأ، یعنی  $E_1^\circ, E_2^\circ$ ، داشته باشیم  $E_1^\circ \subset E_2^\circ$  یا  $E_2^\circ \subset E_1^\circ$ .

مثال. وضعیت نسبی خط راست  $l: \frac{x_1-2}{1} = \frac{x_2}{2} = \frac{x_3}{0} = \frac{x_4-1}{1} = \frac{x_5+2}{-1}$  را با زیرفضای سه بعدی  $E = \langle e_3; e_1, e_4, e_5 \rangle$  از  $\mathbb{R}^5$  بررسی کنید. عناصر  $E$  به شکل  $(x_1, 0, 1, x_4, x_5)$ ، و برای نقاط  $l$  مؤلفه سوم صفر است، پس  $l \cap E$  تهی است. داریم  $l^\circ: \frac{x_1}{1} = \frac{x_2}{2} = \frac{x_3}{0} = \frac{x_4}{1} = \frac{x_5}{-1}$  و  $E^\circ = \langle e_1, e_4, e_5 \rangle$ ، یعنی مؤلفه های دوم و سوم عناصر  $E^\circ$  صفر هستند. حال نقطه  $(1, 2, 0, 1, -1)$  روی  $l^\circ$  قرار دارد ولی در  $E^\circ$  نیست، پس  $l^\circ \not\subset E^\circ$ . از طرفی دیگر  $E^\circ \not\subset l^\circ$  زیرا که بعد  $E^\circ$  از بعد  $l^\circ$  بزرگتر است. پس  $E$  و  $l$  موازی نیستند.  $E$  و  $l$  را مثل گذشته متناظر می نامیم.

# ضرب داخلی و هندسه اقلیدسی در $\mathbb{R}^n$ (۱)

تاکنون مفاهیم ابتدایی نقطه، خط، صفحه و ترازی را به  $\mathbb{R}^n$  تعمیم داده‌ایم. در هندسه مقدماتی طول و زاویه نیز نقش مهمی ایفا می‌کنند. هدف بعدی ما معرفی این مفاهیم در  $\mathbb{R}^n$  و بحث پیرامون موضوع‌های هندسی وابسته به آنهاست. برای این کار رابطه طول، زاویه و ضرب داخلی بردارها در  $\mathbb{R}^2$  و  $\mathbb{R}^3$  را یادآوری می‌کنیم و خاطر نشان می‌سازیم که هر دو مفهوم "طول" و "زاویه" را می‌توان برحسب ضرب داخلی بیان کرد. از این رو در  $\mathbb{R}^n$  ضرب داخلی را مبنای بحث قرار می‌دهیم.

اگر  $u, v$  دو بردار در  $\mathbb{R}^3$  باشند اغلب حاصل ضرب داخلی آنها،  $u \cdot v$ ، به صورت زیر تعریف

می‌شود:

$$u \cdot v = |u||v| \cos \alpha \quad (1)$$

که  $\alpha \in [0, \pi]$  زاویه بین  $u$  و  $v$  است و  $|u|$  طول بردار را نمایش می‌دهد. با قرار دادن  $u = v$ ، از (۱) نتیجه می‌شود که:

$$|u| = \sqrt{u \cdot u} \quad (2)$$

یعنی طول بردار را می‌توان برحسب ضرب داخلی بیان کرد. حال اگر  $u \neq \underline{0}$  و  $v \neq \underline{0}$ ، به طوری که زاویه بین آنها،  $\alpha \in [0, \pi]$ ، معنی داشته باشد، از (۱) می‌توان نوشت:

$$\cos \alpha = \frac{u \cdot v}{\sqrt{u \cdot u} \sqrt{v \cdot v}} \quad (3)$$

تابع کسینوس روی بازه  $[0, \pi]$  یک به یک است و همه مقادیر ممکن برای کسینوس، یعنی اعداد بازه  $[-1, 1]$  را (یک بار) اتخاذ می‌کند، پس تابع معکوس  $\cos^{-1}: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$  وجود دارد و می‌توان نوشت:

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{u \cdot v}{\sqrt{u \cdot u} \sqrt{v \cdot v}}\right) \quad (4)$$

بدین ترتیب مفهوم زاویه بین دو بردار نیز به کمک (4) از ضرب داخلی به دست می‌آید. حال اگر بتوان حاصل ضرب داخلی دو بردار را مستقل از "طول" و "زاویه" تعریف کرد، می‌توان با به کار گرفتن (2) و (4) به تعریف مفاهیم طول و زاویه رسید. در واقع در هندسه تحلیلی دو بعدی و سه بعدی عبارتی جبری برای حاصل ضرب داخلی به دست می‌آید (به کمک قضیه مثلثاتی "قاعده کسینوس") که این خواست را برآورده می‌کند. در  $\mathbb{R}^2$  اگر  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$  و  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$  ثابت می‌شود که:

$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 \quad (5)$$

و نیز در  $\mathbb{R}^3$ ، برای  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  و  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ :

$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 \quad (6)$$

عبارت‌های جبری (5) و (6) تعریف زیر را در  $\mathbb{R}^n$  القا می‌کنند:

(4-1) تعریف. برای  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$  و  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$  حاصل ضرب داخلی،  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ ، به

صورت زیر تعریف می‌شود:

$$u \cdot v = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n$$

خواص زیر همه به سادگی از تعریف فوق نتیجه می‌شوند:

(4-2) خواص ابتدایی حاصل ضرب داخلی

(۱-۲-۴) برای هر  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$   $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ .

(۲-۲-۴) برای هر  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$   $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})$  و  $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$ .

(۳-۲-۴) برای هر  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  و هر  $r \in \mathbb{R}$   $(r\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = r(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$  و  $\mathbf{u} \cdot (r\mathbf{v}) = r(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$ .

(۴-۲-۴) برای هر  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$   $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0$  و  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$  اگر و تنها اگر  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ .

با توجه به (۴-۲-۴) و با الهام از (۲)، طول  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} \quad (۷)$$

تنها  $n$ -تایی دارای طول صفر،  $\mathbf{0}$  است. برای  $|\mathbf{u}|$ ، علاوه بر طول، اصطلاح‌های نرم و قدر مطلق نیز به کار می‌رود. بعضی  $|\mathbf{u}|$  را به  $\|\mathbf{u}\|$  نمایش می‌دهند.

اکنون می‌خواهیم مفهوم زاویه بین  $\mathbf{u}$  و  $\mathbf{v}$  را نیز همانند (۴) تعریف کنیم. برای این کار باید اطمینان

حاصل کرد که با تعریف ارائه شده در  $\mathbb{R}^n$ ، مقدار عبارت  $\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}}$  همواره در بازه  $[-1, 1]$  قرار دارد.

(۳-۴) نامساوی کوشی-شوارتس. برای هر  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| |\mathbf{v}|$$

به علاوه شرطی لازم و کافی برای برقراری تساوی این است که  $\mathbf{u}$  و  $\mathbf{v}$  همراستا باشند.

اثبات. نخست حالتی را در نظر بگیرید که  $\mathbf{u}$  و  $\mathbf{v}$  همراستا هستند. اگر یکی از  $\mathbf{u}$  و  $\mathbf{v}$  صفر باشد که دو

طرف نامساوی بالا صفر می‌شود، در غیر این صورت  $\mathbf{v} = r\mathbf{u}$  برای عدد حقیقی مناسب  $r$ . در این

صورت هر دو طرف نامساوی به  $|r| |\mathbf{u}|^2$  تبدیل می‌شود و تساوی برقرار است. حال فرض کنید  $\mathbf{u}$  و

$\mathbf{v}$  همراستا نباشند، بالاخص  $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$  و  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ .  $n$ -تایی  $\mathbf{v} = x\mathbf{u} + \mathbf{w}$ ،  $x \in \mathbb{R}$  را در نظر بگیرید. داریم



$xu + v \neq 0$  زیرا در غیر این صورت  $v = -xu$  و همراستایی ایجاد می‌شود. پس:

$$(xu + v) \cdot (xu + v) > 0 \quad (\text{طبق } 4-2-4)$$

$$(xu) \cdot (xu) + (xu) \cdot v + v \cdot (xu) + (v \cdot v) > 0 \quad (\text{با استفاده مکرر از } 2-2-4)$$

$$(u \cdot u)x^2 + 2(u \cdot v)x + (v \cdot v) \quad (\text{با استفاده مکرر از } 3-2-4 \text{ و } 1-2-4)$$

این نامساوی درجه دوم نسبت به  $x$  برای هر عدد حقیقی  $x$  برقرار است، پس مبین عبارت منفی است:

$$(u \cdot v)^2 - (u \cdot u)(v \cdot v) < 0$$

یا

$$|u \cdot v|^2 < |u|^2 |v|^2$$

□ که نامساوی مورد نظر است.

حال با توجه به نامساوی ثبت شده داریم

$$-1 \leq \frac{u \cdot v}{\sqrt{u \cdot u} \sqrt{v \cdot v}} = \frac{u \cdot v}{|u||v|} \leq 1$$

ویگانه مقدار واقع در  $[0, \pi]$  که کسینوس آن برابر  $\frac{u \cdot v}{\sqrt{u \cdot u} \sqrt{v \cdot v}}$  است زاویه بین  $u$  و  $v$  می‌نامیم:

$$\angle(u, v) = \cos^{-1} \frac{u \cdot v}{\sqrt{u \cdot u} \sqrt{v \cdot v}} \quad (8)$$

قضیه زیر که از ابتدایی‌ترین قضایای هندسه است، از نامساوی کوشی-شوارتس نتیجه می‌شود:

(4-4) نامساوی مثلث برای هر  $u, v \in \mathbb{R}^n$

$$|u + v| \leq |u| + |v|$$

شرط لازم و کافی برای برقراری تساوی این است که یکی از  $u$  و  $v$  مضربی نامنفی از دیگری باشد.

اثبات. کافی است نامساوی برای مجذور دو طرف ثابت شود، یعنی:

$$|u + v|^2 \leq |u|^2 + |v|^2 + 2|u||v|$$

که معادل است با

$$(u + v) \cdot (u + v) \leq (u \cdot u) + (v \cdot v) + 2|u||v|$$

و پس از ساده کردن:

$$u \cdot v \leq |u||v|$$

$$|u||v| \cos \angle(u, v) \leq |u||v| \quad (\text{طبق نتیجه نامساوی کوشی-شوارتس})$$

اگر  $u$  و  $v$  صفر باشد (که در این صورت یکی مضرب صفر از دیگری است) تساوی برقرار می‌شود، و اگر هر دو ناصفر باشند، رابطه بالا معادل است با:

$$\cos \angle(u, v) \leq 1$$

که همواره برقرار است. تساوی در صورتی حاصل می‌شود که  $\cos \angle(u, v) = 1$ ، یعنی  $u$  و  $v$  همراستا و هم جهت باشند.  $\square$

برای دو عنصر  $u$  و  $v$  از  $\mathbb{R}^n$  می‌نویسیم  $u \perp v$ ، و می‌گوییم  $u$  بر  $v$  عمود است در صورتی که  $u \cdot v = 0$ . قضیه فیثاغورس که پایه هندسه اقلیدسی است در  $\mathbb{R}^n$  با تعاریف طول و زاویه ذکر شده برقرار است:

(۴-۵) قضیه فیثاغورس. هرگاه برای  $u, v \in \mathbb{R}^n$  داشته باشیم  $u \perp v$ ، آنگاه:

$$|u + v|^2 = |u|^2 + |v|^2$$

اثبات. عبارت بالا را می‌توان به صورت

$$(u + v) \cdot (u + v) = (u \cdot u) + (v \cdot v)$$

نوشت که با توجه به  $u \cdot v = 0$  برقرار است.  $\square$

توجه کنید که با همین استدلال (یا جایگزینی  $-v$  به جای  $v$ )، رابطه  $|\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2$  نیز تحت فرض  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$  برقرار است. در  $\mathbb{R}^n$  نیز، مانند  $\mathbb{R}^2$ ، قضیه فیثاغورس به شکل  $|\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2$  حالت خاص قاعده کسینوس است که می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$|\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2|\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos \angle(u, v) \quad v \neq \mathbf{0}, u \neq \mathbf{0} \quad (9)$$

این نیز از محاسبه‌ای مشابه محاسبه بالا با استفاده از (8) به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} |\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 &= (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \\ &= |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \\ &= |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2|\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos \angle(u, v) \quad (\text{طبق (8)}) \end{aligned}$$

به طور کلی، هرگاه  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  و  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$  دو عنصر  $\mathbb{R}^n$  باشند، فاصله  $\mathbf{x}$  از  $\mathbf{y}$ ، که گاهی به  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  نمایش داده می‌شود، برابر  $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$  تعریف می‌شود. این تعریف با آنچه از بردارها در  $\mathbb{R}^2$  و  $\mathbb{R}^3$  می‌دانیم سازگار است. قضیه‌های هندسی اخیر را می‌توانیم با توجه به این تعریف به صورت‌های آشناتری نیز ارائه کنیم:

(4-6) نامساوی مثلث. برای  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$  در  $\mathbb{R}^n$ :

$$|\mathbf{y} - \mathbf{z}| \leq |\mathbf{y} - \mathbf{x}| + |\mathbf{x} - \mathbf{z}|$$

(4-7) قضیه فیثاغورس. هرگاه برای  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$  در  $\mathbb{R}^n$  داشته باشیم  $(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \perp (\mathbf{x} - \mathbf{z})$ ، آنگاه:

$$|\mathbf{y} - \mathbf{z}|^2 = |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2 + |\mathbf{z} - \mathbf{x}|^2$$

(4-8) قاعده کسینوس. برای هر  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$  در  $\mathbb{R}^n$  داریم:

$$|\mathbf{y} - \mathbf{z}|^2 = |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2 + |\mathbf{z} - \mathbf{x}|^2 - 2|\mathbf{y} - \mathbf{x}||\mathbf{z} - \mathbf{x}| \cos \angle(\mathbf{y} - \mathbf{x}, \mathbf{z} - \mathbf{x})$$

هریک از این روابط با جایگزینی در رابطه متناظر به دست می آید. در (۶-۴) بنویسید  $u = y - x$  و  $v = x - z$ ، آنگاه  $u + v = y - z$ . در مورد (۷-۴) و (۸-۴)، می نویسیم  $u = y - x$  و  $v = z - x$ ، آنگاه  $u - v = y - z$ .

(۹-۴) تصویر قائم روی یک راستا. یکی از موارد استفاده مهم ضرب داخلی در  $\mathbb{R}^2$  و  $\mathbb{R}^3$  محاسبه تصویر قائم یک بردار روی راستایی است که یک بردار ناصفر دیگر پدید می آورد (شکل ۱).

### شکل ۱

اگر  $u \neq 0$  و  $v \neq 0$  در  $\mathbb{R}^3$  باشند،  $u'$  تصویر قائم  $u$  بر راستای  $v$ ، برداری است که طول آن برابر  $|u| \cos \angle(u, v)$  است (در حالتی که  $u = 0$ ، این طول برابر صفر در نظر گرفته می شود هرچند که زاویه بین  $u, v$  تعریف نشده است)،  $u'$  مضربی از  $v$  است،  $u' = ru$ ، و علامت  $r$  با علامت کسینوس زاویه بین  $u$  و  $v$  یکی است. بدین ترتیب اگر  $\frac{v}{|v|}$  بردار واحد در جهت  $v$  باشد، می توان نوشت:

$$u' = |u| \cos \angle(u, v) \frac{v}{|v|} \quad (10)$$

یا معادلاً:

$$u' = \frac{u \cdot v}{|v|^2} v \quad (11)$$

با توجه به این که عبارتهای سمت راست (۱۱) همه در  $\mathbb{R}^n$  معنی دارند، می توانیم تصویر قائم  $u$  بر  $v \neq 0$  در  $\mathbb{R}^n$  را نیز به صورت (۱۱) تعریف کنیم. در حالت خاصی که  $v$  یک بردار واحد باشد:

$$|v| = 1 \quad u' = (u \cdot v)v \quad (12)$$

مثال (پایه متداول  $\mathbb{R}^n$ ).  $e_1, \dots, e_n$  را مانند مثال صفحه ۸ جلسه قبل در نظر بگیرید، یعنی

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)$$

هر  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  را می‌توان به صورت:

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$$

نوشت. در واقع  $x_i e_i$  تصویر قائم  $\mathbf{x}$  بر راستای  $e_i$  (محور  $i$  ام) است:

$$(x \cdot e_i) e_i = x_i e_i$$

پس می‌توان نوشت:

$$x = \sum_{i=1}^n (x \cdot e_i) e_i \quad (13)$$

مجموعه  $\{e_1, \dots, e_n\}$  را پایه متداول  $\mathbb{R}^n$  می‌نامند.

## ضرب داخلی و هندسه اقلیدسی در $\mathbb{R}^n$ (۲)

در پایان جلسه گذشته مشاهده کردیم که اگر پایه متداول  $\mathbb{R}^n$  باشد، هر عنصر  $x$  از  $\mathbb{R}^n$  را می‌توان به صورت

$$x = \sum_{i=1}^n (x \cdot e_i) e_i \quad (۱)$$

نمایش داد. حال به یک تعمیم این مطلب اشاره می‌کنیم. به طور کلی، اگر  $\{b_1, \dots, b_k\}$  یک مجموعه در  $\mathbb{R}^n$  باشد (در حالت خاص، پایه‌ای برای زیرفضای خطی  $E$  از  $\mathbb{R}^n$ )،  $\{b_1, \dots, b_k\}$  را متعامد می‌نامیم در صورتی که برای  $b_i \perp b_j$  برای  $i \neq j$ . مجموعه  $\{b_1, \dots, b_k\}$  را راست هنجار می‌نامیم در صورتی که متعامد باشد و به علاوه  $|b_i| = 1$  برای  $i = 1, \dots, k$ . به عنوان نمونه،  $\{e_1, \dots, e_n\}$  یک پایه راست هنجار برای  $\mathbb{R}^n$  است و هرگاه اعداد حقیقی ناصفر  $c_1, \dots, c_n$  داده شده باشند،  $\{c_1 e_1, \dots, c_n e_n\}$  یک پایه متعامد برای  $\mathbb{R}^n$  است. حال فرض کنید  $\{b_1, \dots, b_k\}$  یک پایه راست هنجار برای زیرفضای خطی  $E$  باشد و  $x \in E$ . داریم  $x = \sum_{i=1}^k t_i b_i$ . اگر ضرب داخلی دو طرف را با  $b_j$ ،  $j$  ثابت، محاسبه کنیم، حاصل می‌شود  $x \cdot b_j = \sum_{i=1}^k t_i (b_i \cdot b_j)$ . از آنجا که پایه راست هنجار است، نتیجه می‌شود که  $b_i \cdot b_j = 0$  اگر  $i \neq j$  و  $b_j \cdot b_j = 1$  پس  $x \cdot b_j = t_j$ . بنابراین عین فرمول (۱) در اینجا نیز برقرار است:

$$x = \sum_{i=1}^k (x \cdot b_i) b_i \quad (۲)$$

بدین ترتیب محاسبه ضرایب نمایش نسبت به یک پایه راست هنجار بسیار ساده است. به زودی یک روش عمومی برای ساختن پایه‌های راست هنجار برای زیرفضاهای خطی ارائه خواهیم کرد، ولی مقدمتاً گزاره زیر را مطرح می‌کنیم:

(۱-۱۰) گزاره. اگر  $\{B_1, \dots, B_k\}$  یک مجموعه متعامد متشکل از عناصر ناصفر  $\mathbb{R}^n$  باشد، آنگاه  $\{B_1, \dots, B_k\}$  مستقل خطی است.

اثبات. فرض کنید  $c_1 B_1 + \dots + c_k B_k = \mathbf{0}$  باید ثابت کنیم همه  $c_i$  ها صفر هستند. برای  $j$  ثابت و دلخواه، حاصل ضرب داخلی دو طرف رابطه را با  $B_j$  محاسبه می‌کنیم:

$$c_1 (B_1 \cdot B_j) + \dots + (B_k \cdot B_j) = 0$$

ولی  $B_i \cdot B_j = 0$  مگر وقتی که  $i = j$  که در این صورت  $B_j \cdot B_j = |B_j|^2$  ناصفر است زیرا که همه  $B_1, \dots, B_k$  ناصفر فرض شده‌اند. پس از رابطه  $c_j |B_j|^2 = 0$  نتیجه می‌گیریم که  $c_j = 0$ . چون  $j$  در بین  $1, \dots, k$  دلخواه بود، حکم به اثبات می‌رسد.  $\square$

اکنون نشان می‌دهیم چگونه می‌توان به کمک هر پایه داده شده برای زیرفضای خطی  $E$ ، یک پایه راست هنجار برای  $E$  ساخت:

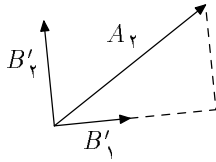
(۲-۱۰) روش گرام-اشمیت. فرض کنید  $E$  یک زیرفضای خطی  $k$ -بعدی از  $\mathbb{R}^n$  است که متشکل از ترکیب‌های خطی  $t_1 A_1 + \dots + t_k A_k$  از مجموعه مستقل خطی  $\{A_1, \dots, A_k\}$  می‌باشد. می‌خواهیم یک پایه راست هنجار  $\{B_1, \dots, B_k\}$  برای  $E$  بسازیم. برای این کار نخست یک پایه متعامد  $\{B'_1, \dots, B'_k\}$  برای  $E$  به دست می‌آوریم، سپس با قرار دادن  $B_i = \frac{1}{\|B'_i\|} B'_i$ ، یک پایه راست هنجار حاصل می‌شود.

برای ساختن  $\{B'_1, \dots, B'_k\}$ ، گام به گام به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$(۱) \quad B'_1 = A_1 \text{ قرار می‌دهیم.}$$

(۲) برای ساختن  $B'_2$ ، تصویر قائم  $A_2$  بر  $B'_1 = A_1$  را از  $A_2$  کم می‌کنیم:

$$B'_2 = A_2 - \frac{A_2 \cdot B'_1}{B'_1 \cdot B'_1} B'_1 \quad (۳)$$



توجه کنید که  $B'_2 \perp B'_1$  زیرا حاصل ضرب داخلی طرف راست با  $B'_1$  صفر می‌شود. به علاوه  $B'_2 \neq \underline{0}$  زیرا که اگر  $B'_2 = \underline{0}$ ، آنگاه با توجه به این که  $A_1 = B'_1$ ، یک رابطه وابستگی خطی  $\{A_1, A_2\}$  پدید می‌آید که خلاف فرض استقلال خطی  $\{A_1, \dots, A_k\}$  و در نتیجه استقلال خطی هر زیرمجموعه آن، است. نتیجه این که بنابر گزاره  $۱-۱۰$ ،  $\{B'_1, B'_2\}$  مستقل خطی است. ضمناً توجه کنید که  $\langle B'_1, B'_2 \rangle = \langle A_1, A_2 \rangle$  زیرا که  $B'_1 = A_1$  و طبق (۳) می‌توان نقش  $A_2$  و  $B'_2$  را مبادله کرد.

(۳) به طور استقرایی می‌توان به این روش ادامه داد. اگر  $\{B'_1, \dots, B'_j\}$  به دست آمده باشد،  $j < k$ ، که عناصر آن ناصفر و دو به دو بر هم عمودند به طوری که  $\langle B'_1, \dots, B'_j \rangle = \langle A_1, \dots, A_j \rangle$ ،  $B'_{j+1}$  را به روش زیر می‌سازیم:

$$B'_{j+1} = A_{j+1} - \frac{A_{j+1} \cdot B'_1}{B'_1 \cdot B'_1} B'_1 - \dots - \frac{A_{j+1} \cdot B'_j}{B'_j \cdot B'_j} B'_j \quad (۴)$$

در واقع در (۴) تصویر قائم  $A_{j+1}$  بر تک تک  $B'_1, \dots, B'_j$  را از  $A_{j+1}$  کم کرده‌ایم. حاصل باید بر  $B'_1, \dots, B'_j$  عمود باشد که این موضوع با محاسبه حاصل ضرب داخلی دو طرف راست (۴) با  $B'_i$ ،  $i = 1, \dots, j$ ، مشاهده می‌شود. همچنین توجه کنید که  $B'_{j+1} \neq \underline{0}$  زیرا که طبق فرض



استقراء  $\langle A_1, \dots, A_j \rangle = \langle B'_1, \dots, B'_j \rangle$  و  $\{A_1, \dots, A_j, A_{j+1}\}$  مستقل خطی است. و بالاخره مجموعه متعامد  $\{B'_1, \dots, B'_{j+1}\}$  که همه عناصرش ناصفرند، طبق  $1-10$  مستقل خطی است و مجدداً با استدلال مشابه گام ۲ داریم  $\langle B'_1, \dots, B'_{j+1} \rangle = \langle A_1, \dots, A_{j+1} \rangle$ .

بدین ترتیب با ادامه روش، در گام  $k$  به مجموعه  $\{B'_1, \dots, B'_k\}$  دست می‌یابیم که از عناصر ناصفر دو به دو برهم عمود در  $E$  تشکیل شده است. چون تعداد عناصر برابر بعد  $E$  است و مجموعه طبق  $1-10$  مستقل خطی است، به یک پایه متعامد برای  $E$  دست یافته‌ایم.  $\square$

مثال. تحقیق می‌کنیم که مجموعه  $\{A_1, A_2, A_3\}$  در  $\mathbb{R}^4$  که در آن  $A_1 = (0, 0, -1, 1)$ ،  $A_2 = (1, 0, 2, 0)$  و  $A_3 = (1, 1, 3, 0)$  یک مجموعه مستقل خطی است. فرض کنید پس  $c_1 A_1 + c_2 A_2 + c_3 A_3 = \underline{0}$

$$(c_2 + c_3, c_3 - c_1 + 2c_2 + 3c_3, c_1) = (0, 0, 0, 0)$$

نتیجه این که  $c_3 = 0$  و  $c_1 = 0$  که از اینها نتیجه می‌شود  $c_2 = 0$  پس  $\{A_1, A_2, A_3\}$  مستقل خطی است.  $E = \langle A_1, A_2, A_3 \rangle$  را زیرفضای متشکل از ترکیب‌های خطی  $A_1, A_2, A_3$  می‌گیریم، توجه کنید که  $\{A_1, A_2, A_3\}$  متعامد نیست، مثلاً  $A_1 \cdot A_2 = -2 \neq 0$ . روش گرام-اشمیت را به کار می‌گیریم:

$$B'_1 = A_1 = (0, 0, -1, 1)$$

$$B_2 = (1, 0, 2, 0) - \frac{(1, 0, 2, 0) \cdot (0, 0, -1, 1)}{(0, 0, -1, 1) \cdot (0, 0, -1, 1)} (0, 0, -1, 1) = (1, 0, 2, 0) + (0, 0, -1, 1)$$

یا  $B'_2 = (1, 0, 1, 1)$ . بالاخره:

$$B'_3 = (1, 1, 3, 0) - \frac{(1, 1, 3, 0) \cdot (0, 0, -1, 1)}{(0, 0, -1, 1) \cdot (0, 0, -1, 1)} (0, 0, -1, 1) - \frac{(1, 1, 3, 0) \cdot (1, 0, 1, 1)}{(1, 0, 1, 1) \cdot (1, 0, 1, 1)} (1, 0, 1, 1)$$

$$= (1, 1, 3, 0) + \frac{3}{4} (0, 0, -1, 1) - \frac{4}{5} (1, 0, 1, 1)$$

$$= \left(-\frac{1}{5}, 1, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right)$$

پس مجموعه  $\{(0, 0, -1, 1), (1, 0, 1, 1), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, 1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})\}$  یک پایه متعامد برای  $E$  است، که می توان این مطلب را مستقیماً نیز تحقیق کرد. برای یافتن یک پایه راست هنجار، هر یک از  $B'_i$  ها را در معکوس طول آن ضرب می کنیم:

$$B_1 = (0, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$B_2 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$$

$$B_3 = (-\frac{2}{\sqrt{62}}, \frac{7}{\sqrt{62}}, \frac{1}{\sqrt{62}}, \frac{1}{\sqrt{62}})$$

روش گرام-اشمیت در تکمیل یک مجموعه متعامد (یا راست هنجار) به یک پایه کامل نیز به کار گرفته می شود:

(۱۰-۳) تکمیل مجموعه متعامد به پایه. فرض کنید  $\{B_1, \dots, B_k\}$  یک مجموعه راست هنجار از عناصر  $E$  باشد که  $k < n$ . نشان می دهیم چگونه می توان با استفاده از روش ۱۰-۲، عناصر  $B_{k+1}, \dots, B_n$  از  $\mathbb{R}^n$  یافت، به طوری که  $\{B_1, \dots, B_n\}$  یک پایه راست هنجار برای تمام  $\mathbb{R}^n$  باشد. چون  $k < n$ ، عنصری  $A_{k+1}$  از  $\mathbb{R}^n$  یافت می شود که در  $\langle A_1, \dots, A_k \rangle$  نیست. به روش گرام-اشمیت با کم کردن تصویر قائم  $A_{k+1}$  بر  $B_1, \dots, B_k$ ، عنصری  $B'_{k+1}$  به دست می آوریم که  $\{B_1, \dots, B_k, B'_{k+1}\}$  متعامد و مستقل خطی است:

$$B'_{k+1} = A_{k+1} - (A_{k+1} \cdot B_1)B_1 - \dots - (A_{k+1} \cdot B_k)B_k$$

سپس با تعریف  $B_{k+1} = \frac{1}{|B'_{k+1}|} B'_{k+1}$ ، یک مجموعه  $\{B_1, \dots, B_k, B_{k+1}\}$  حاصل می شود که عناصر آن طول واحد دارند و دو به دو بر هم عمودند (یعنی یک مجموعه راست هنجار). اگر  $n = k + 1$  که چون این مجموعه مستقل خطی به تعدادی برابر بعد  $\mathbb{R}^n$  عضو دارد، خود یک پایه راست هنجار برای  $\mathbb{R}^n$  می شود،  $\mathbb{R}^n = \langle B_1, \dots, B_{k+1} \rangle$ . اگر  $k + 1 < n$ ، عنصری  $A_{k+2}$  در  $\mathbb{R}^n$  یافت می شود که در  $\langle B_1, \dots, B_{k+1} \rangle$  نیست. به روش بالا، از  $A_{k+2}$ ، عنصری  $B_{k+2}$  می سازیم که

$\{B_1, \dots, B_{k+2}\}$  راست هنجار است. اگر این عمل را  $(n-k)$  بار انجام دهیم به یک مجموعه راست هنجار  $n$  عضوی  $\{B_1, \dots, B_n\}$  می‌رسیم که بنابراین یک پایه برای  $\mathbb{R}^n$  خواهد بود.

(۱۰-۴) کاربرد در معادله زیرفضاها. زیرفضای مستوی  $E$  از  $\mathbb{R}^n$  را یک ابرصفحه در  $\mathbb{R}^n$  می‌نامیم در صورتی که بعد  $E$  برابر  $(n-1)$  باشد. بدین ترتیب ابرصفحه‌های  $\mathbb{R}$ ، نقاط  $\mathbb{R}$  هستند، ابرصفحه‌های  $\mathbb{R}^2$ ، خطوط راست در  $\mathbb{R}^2$ ، و ابرصفحه‌های  $\mathbb{R}^3$ ، صفحات واقع در  $\mathbb{R}^3$  می‌باشند. حال یک ابرصفحه  $E$  از  $\mathbb{R}^n$  در نظر بگیرید. اگر  $E^\circ$  انتقال یافته  $E$  به  $\circ$  باشد، می‌توان برای  $E^\circ$  یک پایه متعامد  $\{B_1, \dots, B_{n-1}\}$  طبق روش گرام-اشمیت در نظر گرفت. با استفاده از ۱۰-۳، عنصری  $C$ ،  $C \neq \circ$ ، در  $\mathbb{R}^n$  وجود دارد که بر  $B_1, \dots, B_{n-1}$  عمود است و در نتیجه  $\{B_1, \dots, B_{n-1}, C\}$  یک پایه متعامد برای  $\mathbb{R}^n$  می‌باشد. توجه کنید که شرطی لازم و کافی برای این که عنصر  $x$  از  $\mathbb{R}^n$  در  $E^\circ$  باشد این است که:

$$C \cdot x = \circ \quad (5)$$

زیرا اگر بنویسیم  $x = \sum_{i=1}^{n-1} c_i B_i + c_n C$  عناصر  $E^\circ$  دقیقاً آن‌هایی هستند که  $c_n = \circ$  پس اگر  $x \in E$ ، آنگاه  $x = \sum_{i=1}^{n-1} c_i (B_i \cdot B_n) = \circ$  بالعکس اگر  $C \cdot x = \circ$  داریم

$$\circ = C \cdot x = \sum_{i=1}^{n-1} c_i (C \cdot B_i) + c_n (C \cdot C) = c_n$$

حال فرض کنید ابرصفحه  $E$  به شکل  $E = \langle p; B_1, \dots, B_{n-1} \rangle$  توصیف شده است که  $p = (p_1, \dots, p_n)$  نقطه‌ای در  $E$  است. نقطه  $x = (x_1, \dots, x_n)$  در  $E$  است اگر و تنها اگر  $x - p \in E^\circ$  پس شرطی لازم و کافی برای این است که

$$(x - p) \cdot C = \circ \quad (6)$$

اگر  $n$  تایی  $C$  را به  $(C_1, \dots, C_n)$  نمایش دهیم، (۶) معادل است با

$$C_1(x_1 - p_1) + \dots + C_n(x_n - p_n) = 0 \quad (۷)$$

این رابطه را معادله ابرصفحه گذرا از  $p$  عمود بر  $C$  می نامند. نمایش متداول خط در صفحه و صفحه در فضای سه بعدی حالت های خاص (۷) هستند.

(۷) را می توان به زیرفضاهای مستوی ابعاد غیر از  $(n - 1)$  تعمیم داد. اگر  $E$  یک زیرفضای مستوی  $k$ -بعدی به شکل  $E = \langle p; B_1, \dots, B_k \rangle$  باشد که در آن  $\{B_1, \dots, B_k\}$  یک پایه متعامد برای انتقال یافته  $E$  به مبدأ،  $E^\circ$  است، طبق روش (۱۰-۳)،  $\{B_1, \dots, B_k\}$  را به پایه ای متعامد  $\{B_1, \dots, B_k, B_{k+1}, \dots, B_n\}$  برای  $\mathbb{R}^n$  تکمیل می کنیم. با استدلالی مشابه آنچه برای ابرصفحه ها آمد، شرطی لازم و کافی برای این که نقطه  $x$  در  $E$  باشد این خواهد بود که  $x - p$  بر  $B_{k+1}, \dots, B_n$  عمود باشد. پس مجموعه نقاطی است که در  $(n - k)$  رابطه زیر صدق می کند:

$$B_{k+1} \cdot (x - p) = 0, \dots, B_n \cdot (x - p) = 0 \quad (۸)$$

مثال. می خواهیم در  $\mathbb{R}^4$  فاصله نقطه  $(1, -1, 0, 2)$  را از خط راست  $\frac{x_1}{1} = \frac{x_2 - 1}{-1} = \frac{x_3 + 1}{-1} = \frac{x_4}{3}$  محاسبه کنیم. مقصود از فاصله نقطه از خط، کوتاهترین فاصله ممکن از نقطه داده شده به نقاط روی خط است. توجه کنید که نقطه داده شده،  $(1, -1, 0, 2)$ ، روی خط داده شده قرار ندارد (چرا؟)، پس خط و نقطه روی یک صفحه مستوی منحصر به فرد قرار می گیرند و می توان به روال هندسه عادی فرض کرد کوتاهترین فاصله با رسم عمود از نقطه بر خط به دست می آید (اثباتی مستقیم از این مطلب در تمرین زیر آمده است). با فرض این مطلب برای یافتن پای عمود از  $(1, -1, 0, 2)$  به خط داده شده، معادله ابرصفحه گذرا از  $(1, -1, 0, 2)$  عمود بر  $(2, 1, -1, 3)$  را می نویسیم و اشتراک آن را با خط پیدا می کنیم. نقطه تقاطع نزدیکترین نقطه خط به  $(1, -1, 0, 2)$  است. طبق (۷)، معادله

ابرفصفحه مورد نظر هست:

$$2(x_1 - 1) + (x_2 + 1) - x_3 + 3(x_4 - 2) = 0$$

حال با جایگزینی از  $\frac{x_2}{3} = \frac{x_3-1}{-1} = \frac{x_4+1}{-1} = \frac{x_4}{3}$  در رابطه بالا برحسب  $x_1$  داریم:

$$2(x_1 - 1) + \left(\frac{x_1}{3} + 2\right) + \left(\frac{x_1}{3} + 1\right) + 3\left(\frac{2}{3}x_1 - 2\right) = 0$$

$$x_1 = \frac{2}{3}$$

پس  $x_2 = \frac{4}{3}, x_3 = -\frac{4}{3}, x_4 = 1$  و نقطه  $(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, 1)$  نزدیکترین نقطه خط به  $(1, -1, 0, 2)$  می باشد که فاصله اش برابر مقدار زیر است:

$$\sqrt{\left(1 - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(-1 - \frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 + (2 - 1)^2} = \frac{5}{\sqrt{3}}$$

تمرین. فرض کنید در  $\mathbb{R}^n$  خط گذرا از  $a$  به موازات  $A$  است،  $a = (a_1, \dots, a_n)$ ،  $A = (A_1, \dots, A_n)$  و  $a \neq A$  یک نقطه در  $\mathbb{R}^n$  است. نشان دهید به ازای نقطه منحصر به فردی  $q$  روی  $l$  نزدیکترین فاصله به  $p$  حاصل می شود و در واقع  $q = a + \frac{(p-a) \cdot A}{A \cdot A} A$  (یعنی از نقطه  $a$  روی  $l$  باید به اندازه تصویر قائم  $(p-a)$  روی  $A$  جدا کرد تا به نقطه  $q$  رسید).

راهنمایی. معادله پارامتری خط  $l$ ،  $x_i = a_i + tA_i$  را در نظر بگیرید و مجذور فاصله  $p$  از نقطه  $a + tA$  را برحسب  $t$  بنویسید. عبارت به دست آمده، یک عبارت درجه ۲ برحسب  $t$  خواهد بود که با توجه به نقطه مینیموم سهمی می توان  $t$  مطلوب را از آن محاسبه کرد.

# نگاشت‌های خطی (۱)

وقتی  $m \times n$  عدد حقیقی  $a_{ij}$ ،  $i = 1, \dots, m$ ،  $j = 1, \dots, n$  را در یک قالب  $m$  در  $n$  با  $m$  ردیف و  $n$  ستون به شکل زیر بنویسیم، یک ماتریس  $m \times n$  (حقیقی) تعریف می‌شود:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{bmatrix}$$

اعداد مندرج در ماتریس را درایه‌های ماتریس می‌نامند. مقصود از  $a_{ij}$  درایه‌ای است که در ردیف  $i$ ام و ستون  $j$ ام قرار دارد. گاهی اوقات  $A$  را به صورت  $[a_{ij}]$ ، یا به طور کاملتر  $[a_{ij}]_{i=1, \dots, m, j=1, \dots, n}$  می‌نویسیم.

برای ماتریس‌های هم اندازه می‌توان عمل جمع، و عمل ضرب در اعداد حقیقی، همانند عملیات مشابه برای  $n$  تایی‌ها (بردارها) را تعریف کرد. اگر  $A = [a_{ij}]$  و  $B = [b_{ij}]$  دو ماتریس  $m \times n$  باشند، مجموع دو ماتریس،  $A + B = [c_{ij}]$  با فرمول

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad (1)$$

تعریف می‌شود. تحقیق صحت خواص زیر از تعریف سراسر است:

## (۱-۱) خواص ابتدایی جمع ماتریس‌ها

(۱-۱-۱) تعویض‌پذیری (جابجایی). اگر  $A$  و  $B$  دو ماتریس  $m \times n$  باشند، داریم

$$A + B = B + A$$

(۱۱-۱-۲) شرکت پذیری. اگر  $A, B$  و  $C$  ماتریس‌های  $m \times n$  باشند، داریم  $A + (B + C) = (A + B) + C$ .

(۱۱-۱-۳) عنصر بی‌اثر. ماتریس صفر  $m \times n$  که همه درایه‌های آن صفر است و به  $O$  نمایش می‌دهیم (یگانه ماتریس  $m \times n$ ) دارای این ویژگی است که برای هر ماتریس  $m \times n$ ،  $A$  داریم  $A + O = O + A = A$ .

(۱۱-۱-۴) عنصر قرینه. برای  $A = [a_{ij}]$ ، ماتریس  $-A = [b_{ij}]$  که با  $b_{ij} = -a_{ij}$  تعریف می‌شود (یگانه ماتریس) دارای این ویژگی است که  $A + (-A) = (-A) + A = O$ .

حال اگر  $A = [a_{ij}]$  یک ماتریس  $m \times n$  باشد و  $r \in \mathbb{R}$ ، ماتریس  $rA = [b_{ij}]$  با فرمول  $b_{ij} = ra_{ij}$  تعریف می‌شود، یعنی همه درایه‌های  $A$  در عدد  $r$  ضرب می‌شوند. تحقیق خواص زیر نیز سراسر است:

## (۱۱-۲) خواص ابتدایی ضرب اعداد در ماتریس‌ها

$$(۱۱-۲-۱) 1 \cdot A = A \text{ برای هر ماتریس } A.$$

$$(۱۱-۲-۲) (rs)A = r(sA) \text{ برای هر ماتریس } A \text{ و هر زوج عدد حقیقی } r, s.$$

$$(۱۱-۲-۳) (r+s)A = rA + sA \text{ برای هر ماتریس } A \text{ و هر زوج عدد حقیقی } r, s.$$

$$(۱۱-۲-۴) r(A+B) = rA + rB \text{ برای هر عدد حقیقی } r \text{ و هر دو ماتریس هم اندازه } A \text{ و } B.$$

علاوه بر عملیات بالا، مفهوم ضرب ماتریس‌ها نیز مابین ماتریس‌های اندازه‌های مناسب که توضیح

داده خواهد شد، تعریف می‌شود. اگر  $A = [a_{ij}]$  یک ماتریس  $m \times n$  و  $B = [b_{ij}]$  یک ماتریس  $n \times p$  باشد، ماتریس حاصل ضرب،  $AB = [c_{ij}]$ ، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} \quad (2)$$

توجه کنید که لازمه تعریف حاصل ضرب این است که تعداد ستون‌های  $A$  برابر تعداد ردیف‌های  $B$  باشد، بنابراین عبارت (۲) معنی دارد و در واقع می‌توان  $c_{ij}$  را حاصل ضرب داخلی ردیف  $i$  ام ماتریس  $A$  به عنوان  $n$  تایی  $(a_{i1}, \dots, a_{in})$  با ستون  $j$  ام ماتریس  $B$ ، به عنوان  $n$  تایی  $(b_{j1}, \dots, b_{nj})$  تلقی کرد. انگیزه این تعریف را در جلسه آینده بررسی خواهیم کرد.

### (۱۱-۳) خواص ابتدایی ضرب ماتریس‌ها

(۱۱-۳-۱) شرکت پذیری.  $A$ ،  $B$  و  $C$  ماتریس‌های دارای اندازه به ترتیب  $m \times n$ ،  $n \times p$  و  $p \times q$  هستند. در این صورت:

$$(AB)C = A(BC)$$

(۱۱-۳-۲) قانون پخش. داریم

$$(A+B)C = (AC) + (BC) \quad , \quad A(B+C) = (AB) + (AC)$$

مشروط بر این که اندازه ماتریس‌های فوق برای عملیات ذکر شده مناسب باشد.

(۱۱-۳-۳) ماتریس واحد  $n \times n$ ،  $I_n = [\delta_{ij}]$  بدین صورت تعریف می‌شود که:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$



برای هر ماتریس  $A, m \times n$  و هر ماتریس  $B, n \times p$  داریم:

$$A \cdot I_n = A \quad , \quad I_n \cdot B = B$$

اثبات (۱۱-۳-۱) را ارائه می‌کنیم، دوتای دیگر ساده‌ترند و تحقیق آنها به خواننده واگذار می‌شود. برای (۱۱-۳-۱) بنویسید  $A = [a_{ij}]$ ,  $B = [b_{ij}]$ ,  $C = [c_{ij}]$ ,  $AB = [d_{ij}]$ ,  $BC = [e_{ij}]$

و  $(AB)C = [x_{ij}]$  و  $A(BC) = [y_{ij}]$ . طبق تعریف حاصل ضرب ماتریس‌ها عمل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} x_{ij} &= \sum_{k=1}^p d_{ik} c_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^p \left( \sum_{l=1}^n a_{il} b_{lk} \right) c_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n a_{il} b_{lk} c_{kj} \\ &= \sum_{l=1}^n a_{il} \left( \sum_{k=1}^p b_{lk} c_{kj} \right) \\ &= \sum_{l=1}^n a_{il} e_{lj} \\ &= y_{ij} \end{aligned}$$

و حکم به اثبات می‌رسد.

در اینجا قابل ذکر است که اگر  $AB$  تعریف شده باشد، لزومی ندارد  $BA$  نیز تعریف شدنی باشد زیرا که تعریف  $AB$  مستلزم این است که تعداد ستون‌های  $A$  برابر تعداد ردیف‌های  $B$  باشد، و این حکمی در مورد برابری تعداد ستون‌های  $B$  با تعداد ردیف‌های  $A$  نمی‌کند. حتی اگر  $AB$  و  $BA$  هر دو تعریف شدنی باشند، لزومی ندارد هر دو یک اندازه باشند، مثلاً اگر  $A$  یک ماتریس  $1 \times n$  و  $B$  یک

ماتریس  $n \times 1$  باشند،  $n > 1$

$$A = [a_1 \dots a_n] \quad , \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$AB$  یک ماتریس  $1 \times 1$ ، با تک درایه  $\sum_{i=1}^n a_i b_i$  می‌شود، در حالی که  $BA$  یک ماتریس  $n \times n$  است که درایه ردیف  $i$ ام و ستون  $j$ ام آن عبارت است از  $b_j a_i$ . حتی اگر  $A$  و  $B$  هر دو  $n \times n$ ، با  $n \geq 2$ ، باشند، لزومی بر تساوی  $AB$  و  $BA$  نیست، مثلاً:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

البته در مورد ماتریس  $I_n$  و هر ماتریس  $n \times n$ ،  $A$ ، از  $11-3-3$  نتیجه می‌شود که  $AI_n = I_n A$  ( $A =$ ).

توجه کنید که برای یک  $n$ -تایی مرتب از اعداد، مثلاً  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ، اکنون سه نمایش ممکن داریم، یکی به صورت بالا که معمولاً تجسم برداری دارد، دیگر به صورت یک ماتریس  $1 \times n$ ،  $[x_1 \dots x_n]$  و بالاخره به صورت یک ماتریس  $n \times 1$ ،  $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ . اغلب لازم است که بین این سه نمایش تمایز قائل شویم تا ابهامی در عملیات حاصل نشود. برای این منظور، هرگاه  $n$  تایی  $x = (x_1, \dots, x_n)$  به صورت یک ماتریس  $1 \times n$  نوشته شود، آن را به  $|x\rangle$  نمایش می‌دهیم، و هرگاه به صورت یک ماتریس  $n \times 1$  نمایش داده شود، آن را به  $|x\rangle$  نمایش می‌دهیم.

با این مقدمه در مورد ماتریس‌ها، به موضوع اصلی درس که "نگاشت‌های خطی" است می‌پردازیم. کلمات "تابع"، "نگاشت" و "تبدیل" در اینجا به صورت کاملاً مترادف به کار خواهند رفت هر چند که به لحاظ تاریخی گاهی تصاویر ذهنی متفاوتی از این کلمات القاء می‌شود. اگر  $S$  و  $T$  دو مجموعه باشند، مقصود از یک تابع ( $=$  نگاشت،  $=$  تبدیل) از  $S$  به  $T$ ، قانونی  $f$  است که به هر عنصر  $s$  از  $S$ ، عنصر مشخصی  $f(s)$  از  $T$  نسبت می‌دهد. می‌نویسیم  $f: S \rightarrow T$ . در گذشته کلمه "تابع" معمولاً وقتی به کار می‌رفته است که  $T$  برابر  $\mathbb{R}$  یا  $\mathbb{C}$  باشد، "تبدیل" در حالت  $S = T$ ، یعنی تابع‌های از یک مجموعه

به خود آن، و "نگاشت" برای تابع‌های  $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  بزرگتر از ۱، به کار می‌رفته است. ما چنین تمایزهایی قابل نمی‌شویم. برای تابع  $f: S \rightarrow T$ ، مجموعه  $S$  را دامنه (= قلمرو)، و مجموعه  $T$  را بُرد می‌نامیم. مجموعه  $\{f(s) \mid s \in S\}$  که یک زیرمجموعه  $T$  است، تصویر  $f$ ، یا تصویر  $S$  تحت  $f$  خوانده می‌شود. در واقع برای هر زیرمجموعه  $E$  از  $S$ ، تصویر  $E$  تحت  $f$ ، که به  $f(E)$  نمایش داده می‌شود به صورت:

$$f(E) = \{f(s) \mid s \in E\}$$

تعریف می‌شود. تابع  $f$  را یک به یک می‌نامیم در صورتی که  $f(s_1) = f(s_2)$  همواره نتیجه دهد  $s_1 = s_2$ ، و  $f$  پوشا می‌نامیم اگر  $f(S) = T$ . برای تابع‌های یک به یک و پوشا،  $f: S \rightarrow T$ ، تابعی به نام وارون  $f$  (یا معکوس  $f$ ) به صورت زیر تعریف می‌شود که به  $f^{-1}: T \rightarrow S$  نمایش می‌دهیم. هرگاه  $t \in T$ ، چون  $f$  پوشا است، عنصری  $s$  از  $S$  وجود دارد که  $f(s) = t$ . به علاوه چون  $f$  یک به یک فرض شده است، چنین عنصر  $s$  به طور منحصر به فرد تعیین می‌شود، پس  $f^{-1}$  به صورت قانونی بی‌ابهام  $f^{-1}(t) = s$  تعریف شدنی است و داریم:

$$f \circ f^{-1} = \mathbb{1}_T \quad , \quad f^{-1} \circ f = \mathbb{1}_S$$

که مقصود از  $\mathbb{1}_X$  تابع همانی مجموعه  $X$  است،  $\mathbb{1}_X(x) = x$  برای هر  $x \in X$ . نماد  $f^{-1}(t)$  حتی وقتی  $f^{-1}$  تعریف شدنی نباشد نیز به کار می‌رود. مقصود از  $f^{-1}(t)$  مجموعه نقاط  $S$  است که تحت  $f$  به  $t$  فرستاده (= نگاشته) می‌شوند، یعنی:

$$f^{-1}(t) = \{s \in S \mid f(s) = t\}$$

$f^{-1}(t)$  را گاهی مجموعه تراز منسوب به  $t$  می‌خوانیم. به طور کلی، اگر  $Y$  زیرمجموعه‌ای از  $T$  باشد، زیرمجموعه  $f^{-1}(Y)$  (تصویر وارون  $Y$ ) یک زیرمجموعه  $S$  است که بدین صورت تعریف می‌شود:

$$f^{-1}(Y) = \{s \in S \mid f(s) \in Y\}$$

موضوع اصلی درس ما بررسی تابع‌های  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  (یا به طور کلی‌تر، تابع‌های  $f: S \rightarrow \mathbb{R}^m$ )،  $S \subset \mathbb{R}^n$  است. بدین ترتیب چنین تابع  $f$  به هر  $n$  تایی مرتب از اعداد حقیقی در دامنه، یک  $m$  تایی مرتب از اعداد حقیقی نسبت می‌دهد:

$$f(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_m) \quad (3)$$

هر  $y_i$  وابسته به  $(x_1, \dots, x_n)$  است، پس در واقع ارائه  $f$  همانند ارائه  $m$  تابع  $f_1, \dots, f_m$ ، هر یک از  $\mathbb{R}^n$  به  $\mathbb{R}$  است،  $f_i(x_1, \dots, x_n) = y_i$ ،  $i = 1, \dots, m$ . (3) را به صورت زیر نیز می‌نویسیم:

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = y_1 \\ \dots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) = y_m \end{cases} \quad (4)$$

گاهی می‌نویسیم  $f = (f_1, \dots, f_m)$  و هر  $f_i$  را یک مؤلفه  $f$  می‌نامیم.

تابع  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  در (3) یا (4) را خطی می‌نامیم در صورتی که هر  $f_i(x_1, \dots, x_n)$  یک

عبارت همگن درجه اول نسبت به  $x_1, \dots, x_n$  باشد، یعنی:

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ \dots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{cases} \quad (5)$$

مقصود از "همگن" این است که همه جملات سمت راست از یک درجه‌اند، در اینجا همه از درجه

۱، بالاخص جمله ثابت وجود ندارد. اگر هر عبارت سمت راست را فقط درجه ۱ در نظر بگیریم و

محدودیت همگن را حذف کنیم، یک عدد ثابت نیز ممکن است به هر جمله افزوده شود. این گونه

تابع‌ها را مستوی می‌نامیم:

$$\begin{cases} y_1 = a_{10} + a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \dots \\ y_m = a_{m0} + a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{cases} \quad (6)$$

مقدار تابع مستوی (۶) از انتقال مقدار تابع (۵) با  $-m$  تایی ثابت  $(a_{10}, \dots, a_{m0})$  به دست می آید و نیازی به بررسی جداگانه تابع های مستوی نیست.

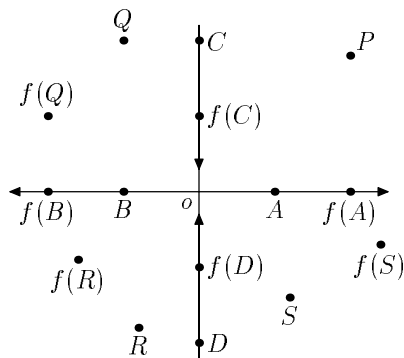
### (۱۱-۴) چند مثال

(۱۱-۴-۱) هر تابع خطی  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  به شکل  $f(x) = mx$  است که در آن  $m \in \mathbb{R}$  یک عدد حقیقی داده شده است. تابع های مستوی  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  به شکل  $g(x) = mx + b$ ،  $m$  و  $b$  اعداد حقیقی داده شده، می باشند.

(۱۱-۴-۲)  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$f(x_1, x_2) = (2x_1, \frac{1}{4}x_2)$$

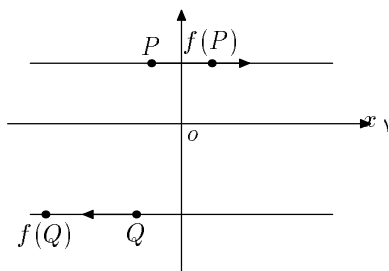
هر دو عبارت  $2x_1$  و  $\frac{1}{4}x_2$  درجه ۱ همگن نسبت به  $(x_1, x_2)$  هستند، پس  $f$  خطی است. عملکرد این تابع بدین صورت است که فاصله هر نقطه را از محور  $x_2$  به دو برابر افزایش می دهد و فاصله آن از محور  $x_1$  را نصف می کند. محور  $x_1$  با ضریب تجانس ۲ به خود آن نگاشته می شود (انبساط با ضریب ۲)، و محور  $x_2$  با ضریب تجانس  $\frac{1}{4}$  روی خود منقبض می شود. (شکل ۱)



(۱۱-۴-۲)  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_2)$$

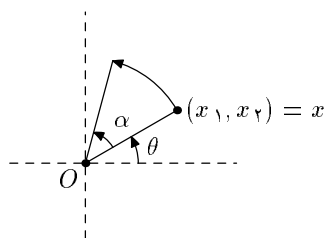
$f$  خطی است. توجه کنید که هر خط راست افقی  $x_2 = c$  به خود آن نگاشته می‌شد ولی هر نقطه روی این خط به اندازه مقدار  $c$  انتقال افقی می‌یابد. بدین ترتیب خطوط راست افقی بالای محور  $x_1$  به طرف راست و خطوط افقی پایین محور  $x_1$  به سمت چپ روی خود می‌لغزند. نقاط محور  $x_1$  سر جای خود ثابت می‌مانند.



(۱۱-۴-۳) (دوران حول  $\underline{e}$  در  $\mathbb{R}^2$ ) دوران حول  $\underline{e}$  در  $\mathbb{R}^2$  با زاویه  $\alpha$  را در نظر بگیرید. اگر

$x = (x_1, x_2)$  نقطه‌ای  $\underline{e} \neq$  در صفحه باشد، نمایش آن به صورت قطبی در نظر بگیرید:

$$x_2 = |x| \sin \theta, \quad x_1 = |x| \cos \theta$$



اگر دوران زاویه  $\alpha$  حول  $\underline{e}$  را به  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  نمایش دهیم، نمایش قطبی  $f(x_1, x_2)$  می‌شود:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= (|x| \cos(\theta + \alpha), |x| \sin(\theta + \alpha)) \\ &= (|x| \cos \theta \cos \alpha - |x| \sin \theta \sin \alpha, |x| \sin \theta \cos \alpha + |x| \cos \theta \sin \alpha) \\ &= ((\cos \alpha)x_1 - (\sin \alpha)x_2, (\sin \alpha)x_1 + (\cos \alpha)x_2) \end{aligned}$$

هریک از دو مؤلفه  $f$  یک تابع درجه یک همگن نسبت به  $(x_1, x_2)$  است، پس  $f$  خطی است.

(۱۱-۴-۴) (تصویر قائم روی یک زیرفضای مختصاتی) فرض کنید  $n > m$  و  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  را

به صورت زیر تعریف کنید

$$f(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_m)$$

این تابع خطی است و عملکرد آن این است که نقطه  $(x_1, \dots, x_n)$  را به  $(x_1, \dots, x_m)$ ، متشکل از  $m$

مؤلفه اول آن، می‌نگارد. مثلاً برای  $n = 3$  و  $m = 2$ ،  $f(x, y, z) = (x, y)$  تصویر قائم  $(x, y, z)$  روی صفحه  $xy$  است.

(۱۱-۴-۵)  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$  را به صورت زیر تعریف کنید:

$$f(x_1, x_2) = (x_1, x_1 - x_2, 2x_1 + x_2, -x_2)$$

چون هر مؤلفه  $f$  یک عبارت درجه یک همگن نسبت به  $(x_1, x_2)$  است، این تابع خطی است.

(۱۱-۴-۶)  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + x_3, x_1 x_2)$$

این تابع خطی نسبت زیرا مؤلفه دوم  $f$ ، یعنی  $x_1 x_2$  از درجه یک نیست.

اکنون ارتباط میان دو بحث این جلسه را بیان می‌کنیم. توجه کنید که می‌توان (۵) را به صورت زیر

نوشت:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (7)$$

یا به طور موجز:

$$|y\rangle = A|x\rangle \quad (8)$$

یعنی محاسبه مقدار یک تابع خطی بدین صورت حاصل می‌شود که ضرایب  $a_{ij}$  در (۵) را در یک ماتریس  $m \times n$  قرار می‌دهیم و حاصل ضرب این ماتریس را با ستون  $|x\rangle$  محاسبه می‌کنیم. بدین ترتیب یک تناظر یک به یک میان تابع‌های خطی  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  و ماتریس‌های  $m \times n$  ایجاد می‌شود.

برای مثال‌های خطی بالا، ماتریس‌های مربوط به ترتیب از بالا به پایین عبارتند از:

$$[m]$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & 1 & \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

با نگاه کردن به ماتریس متناظر به یک تابع خطی می‌توان عمل تابع خطی بر اعضای پایه متداول، یعنی  $e_1, \dots, e_n$  را فوراً دریافت. توجه کنید که اگر ماتریس  $A = [a_{ij}]$  از سمت چپ در ستون  $|e_j\rangle$  ضرب شود، ستون  $j$ -ام ماتریس  $\begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$  به دست می‌آید. بدین ترتیب، برای نوشتن ماتریس مربوط به یک تابع خطی  $f$ ، کافی است  $f(e_1), \dots, f(e_n)$  را محاسبه کنیم و نتایج حاصل را به ترتیب در ستون‌های اول تا  $n$  ام درج کنیم.



## نگاشت‌های خطی (۲)

مثال‌هایی که از تابع‌های خطی در جلسه گذشته ارائه کردیم از تنوع قابل ملاحظه‌ای برخوردار بود و ممکن است این احساس را ایجاد کرده باشد که وجه تشابه چندانی میان تابع‌های خطی موجود نیست. در چند جلسه آینده، برعکس، خواهیم دید که تابع‌های خطی از بعضی وجوه شباهت‌های فوق‌العاده‌ای به هم دارند. بررسی این خواص دست‌آوردهای مهمی برای ما خواهد داشت. یکی از این دستاوردها امکان بحث کامل در مورد وجود و نظام جواب‌های یک دستگاه  $m$  معادله  $n$  مجهولی درجه اول است که به آن خواهیم پرداخت. دستاوردی دیگر زمینه‌سازی برای بررسی توابع غیرخطی در باقیمانده درس است که در آنجا، آنچه در چند جلسه آینده در مورد تابع‌های خطی خواهیم دید رهنمودی مهم خواهد بود. در این جلسه زمینه را برای مطالعه تابع‌های خطی فراهم می‌کنیم. کار عمده ما بازبینی بعضی تعاریف و مفاهیمی خواهد بود که در جلسات قبل مطرح شده‌اند و اکنون آنها را به صورتی قابل استفاده در می‌آوریم.

(۱-۱۲) گزاره. تابع  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  خطی است در صورتی که واجد دو شرط زیر باشد:

الف) برای هر  $x$  و  $x'$  در  $\mathbb{R}^n$ ،  $f(x + x') = f(x) + f(x')$ .

ب) برای هر  $x$  در  $\mathbb{R}^n$  و هر عدد حقیقی  $r$ ،  $f(rx) = rf(x)$ .

اثبات. اگر  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  خطی باشد، ماتریس متناظر با آن،  $A$ ، را در نظر می‌گیریم. عملکرد  $f$  روی عناصر  $x$  از  $\mathbb{R}^n$  به صورت:

$$|f(x)\rangle = A|x\rangle \quad (۱)$$

است. بنابراین:

$$\begin{aligned} |f(x+x')\rangle &= A|x+x'\rangle \\ &= A|x\rangle + A|x'\rangle \quad \text{قانون پخشی ضرب ماتریسی} \\ &= |f(x)\rangle + |f(x')\rangle \end{aligned}$$

پس (الف) برقرار است. همین طور:

$$\begin{aligned} |f(rx)\rangle &= A|rx\rangle \\ &= r(A|x\rangle) \end{aligned}$$

و (ب) برقرار است. بالعکس فرض کنید شرط‌های (الف) و (ب) برای تابع  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  برقرارند. باید نشان دهیم ماتریسی  $A, m \times n$  وجود دارد که برای هر  $x \in \mathbb{R}^n$  داریم  $|f(x)\rangle = A|x\rangle$ . از بحث پایان جلسه قبل به یاد می‌آوریم که ستون‌های ماتریس یک تابع خطی به ترتیب از مؤلفه‌های  $f(e_1)$  تا  $f(e_n)$  تشکیل می‌شوند، بنابراین نامزد واضحی برای ماتریس مورد نظر  $A$  وجود دارد که باید در مورد آن ادعای  $|f(x)\rangle = A|x\rangle$  را ثابت کرد. ماتریس  $A$  را این گونه در نظر می‌گیریم که ستون  $j$ -ام آن، برای  $j = 1, \dots, n$  برابر  $|f(e_j)\rangle$  باشد. برای  $x = (x_1, \dots, x_n) = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$  داریم:

$$\begin{aligned} |f(x)\rangle &= |f(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n)\rangle \\ &= |x_1 f(e_1) + \dots + x_n f(e_n)\rangle \quad \text{طبق (الف) و (ب)} \\ &= |x_1 f(e_1)\rangle + \dots + |x_n f(e_n)\rangle \\ &= x_1 |f(e_1)\rangle + \dots + x_n |f(e_n)\rangle \\ &= x_1 (A|e_1\rangle) + \dots + x_n (A|e_n\rangle) \\ &= A|x_1 e_1\rangle + \dots + A|x_n e_n\rangle \\ &= A|x_1 e_1 + \dots + x_n e_n\rangle \quad \text{قانون پخشی ضرب ماتریسی} \\ &= A|x\rangle \end{aligned}$$

□ و حکم به اثبات می‌رسد.

بدین ترتیب از این پس برای استفاده از خطی بودن یک تابع به کارگیری دو خاصیت (الف) و (ب) بالا کافی است و نیازی به نوشتن صریح ماتریس مربوط نیست.

در جلسه قبل ضرب ماتریسی را تعریف کردیم. این تعریف در نظر اول دور از ذهن و فاقد انگیزه مشخص به نظر می‌رسد؛ ولی گزاره زیر نشان می‌دهد که حاصل ضرب دو ماتریس در واقع بیانگر ترکیب تابع‌های خطی متناظر است.

(۱۲-۲) گزاره. تابع‌های خطی  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  با ماتریس  $A$  و  $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$  با ماتریس  $B$  داده شده‌اند. در این صورت ماتریس  $g \circ f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  برابر  $BA$  است.

اثبات. مقدماً توجه کنید که  $g \circ f$  در واقع یک تابع خطی است که این مطلب را می‌توان با استفاده از گزاره ۱۲-۱ ملاحظه کرد:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x + x') &= g(f(x + x')) \\ &= g(f(x) + f(x')) && \text{چون } f \text{ خطی است} \\ &= g(f(x)) + g(f(x')) && \text{چون } g \text{ خطی است} \\ &= (g \circ f)(x) + (g \circ f)(x')\end{aligned}$$

به همین روش

$$\begin{aligned}(g \circ f)(rx) &= g(f(rx)) \\ &= g(rf(x)) && \text{چون } f \text{ خطی است} \\ &= rg(f(x)) && \text{چون } g \text{ خطی است} \\ &= r(g \circ f)(x)\end{aligned}$$

حال به اثبات ادعای گزاره می پردازیم. ماتریس  $g \circ f$  را به  $C$  نمایش می دهیم. داریم:

$$\begin{aligned} C|x\rangle &= |(g \circ f)(x)\rangle \\ &= |g(f(x))\rangle \\ &= B|f(x)\rangle \\ &= B|(A|x)\rangle \\ &= BA|x\rangle \end{aligned}$$

بنابر ویژگی شرکت پذیری ضرب ماتریسی

پس  $C|x\rangle = BA|x\rangle$ . اگر حاصل ضرب دو ماتریس  $p \times n$  در هر ستون  $n$  تایی برابر باشد، دو ماتریس

برابرند زیرا که با گرفتن  $x = e_j, j = 1, \dots, n$ ، کلیه ستون های ماتریس ها به دست می آیند.  $\square$

بالاخره ضابطه ساده ای برای تحقیق کردن این مطلب که آیا یک زیرمجموعه  $E$  از  $\mathbb{R}^n$  یک

زیرفضای خطی است ارائه می کنیم.

(۱۲-۳) گزاره. زیرمجموعه ناتهی  $E$  از  $\mathbb{R}^n$  یک زیرفضای خطی  $\mathbb{R}^n$  است اگر و تنها اگر دو شرط

زیربرقرار باشند:

الف) هرگاه  $x$  و  $x'$  در  $E$  باشند، آنگاه  $x + x'$  نیز در  $E$  است.

ب) هرگاه  $x$  در  $E$  باشد و  $r \in \mathbb{R}$  آنگاه  $rx$  نیز در  $E$  است.

اثبات. نخست نشان می دهیم هر زیرفضای خطی  $E$  از  $\mathbb{R}^n$  از دو ویژگی فوق برخوردار است.

زیرفضای خطی  $E$  را به شکل  $\langle A_1, \dots, A_k \rangle$ ، یعنی مجموعه ترکیب های خطی  $\{A_1, \dots, A_k\}$ ،

که یک مجموعه مستقل خطی عناصر  $E$  است، در نظر می گیریم. پس  $x$  و  $x'$  به شکل

$$x = t_1 A_1 + \dots + t_k A_k \quad \text{و} \quad x' = t'_1 A_1 + \dots + t'_k A_k$$

$$x + x' = (t_1 + t'_1) A_1 + \dots + (t_k + t'_k) A_k$$

و  $x, x' \in E$ . همین طور:

$$r(t_1 A_1 + \dots + t_k A_k) = (rt_1) A_1 + \dots + (rt_k) A_k$$

و  $rx \in E$ .

بالعکس فرض کنید زیرمجموعه ناتهی  $E$  از  $\mathbb{R}^n$  واجد شرط‌های (الف) و (ب) باشد، نشان می‌دهیم  $E$  یک زیرفضای خطی است، یعنی برابر مجموعه ترکیب‌های خطی یک مجموعه مستقل خطی می‌باشد. قطعاً داریم  $\underline{0} \in E$  زیرا که  $E$  ناتهی است یعنی عنصری  $x$  در  $E$  هست، پس طبق (ب)  $\underline{0} = 0 \cdot x$  در  $E$  قرار دارد.

اگر  $E$  عضو دیگری نداشته باشد، یعنی  $E = \{\underline{0}\}$  که طبق قرارداد  $E$  یگانه زیرفضای خطی صفر بعدی  $\mathbb{R}^n$  است. اگر عضو دیگری  $\underline{0} \neq A_1$  در  $E$  باشد، طبق (ب)، همه مضارب  $A_1$ ، یعنی  $rA_1$  ها،  $r \in \mathbb{R}$  در  $E$  هستند. حال اگر عضو دیگری در  $E$  نباشد، یعنی  $E = \langle A_1 \rangle$ ،  $E$  یک زیرفضای خطی یک بعدی است. در غیراین صورت عنصری  $A_2$  در  $E$  وجود دارد که مضرب  $A_1$  نیست، و در نتیجه  $\{A_1, A_2\}$  مستقل خطی است. طبق (الف) و (ب)، همه ترکیب‌های خطی  $A_1$  و  $A_2$  در  $E$  قرار دارند، یعنی  $\langle A_1, A_2 \rangle \subset E$ .

اگر  $\langle A_1, A_2 \rangle$  همه  $E$  باشد که حکم ثابت شده است، و گرنه، عنصری  $A_3$  در  $E$  وجود دارد که  $\{A_1, A_2, A_3\}$  مستقل خطی است. استدلال بالا را مجدداً به کار می‌گیریم. همه ترکیب‌های خطی  $A_1, A_2, A_3$  طبق (الف) و (ب)، باید در  $E$  باشند. در صورتی که  $\langle A_1, A_2, A_3 \rangle$  همه  $E$  نباشد، عنصری  $A_4$  انتخاب می‌کنیم و غیره. این استدلال باید در حداکثر  $n$  گام به نتیجه رسد زیرا در  $\mathbb{R}^n$  یک مجموعه مستقل خطی نمی‌تواند بیش از  $n$  عضو داشته باشد. بنابراین اگر  $E$  فقط از  $\underline{0}$  تشکیل نشده باشد، در گامی  $k$ ،  $1 \leq k \leq n$ ، به این نتیجه می‌رسیم که  $\langle A_1, \dots, A_k \rangle = E$  و حکم به اثبات می‌رسد.  $\square$

توجه کنید که این گزاره نوعی تایید برقرار بودن ایده شهودی "مسطح بودن" زیرفضاهای خطی است. اگر نقطه‌ای  $x$  در  $E$  باشد خط گذرا از  $\underline{0}$  و  $x$  به تمامی در  $E$  واقع است، و اگر  $x$  و  $x'$  در  $E$  باشند، صفحه گذرا از  $\underline{0}$ ،  $x$  و  $x'$  در  $E$  واقع است. طبق قسمت دوم گزاره، اگر این دو شرط برای  $E$  برقرار باشند می‌توان حکم کرد که  $E$  متشکل از همه ترکیب‌های خطی  $k$  عضو  $\mathbb{R}^n$  است.

## نگاشت‌های خطی (۳)

با مقدمات جلسه قبل اکنون آماده هستیم بررسی عمومی توابع خطی

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \quad (۱)$$

را آغاز کنیم. آنچه در زیر خواهد آمد در رابطه با تابع خطی (۱) خواهد بود.

(۱-۱۳) تحت اثر  $f$ ،  $\underline{o} \in \mathbb{R}^n$  به  $\underline{o} \in \mathbb{R}^m$  نگاشته می‌شود.

اثبات. می‌نویسیم  $\underline{o} = \circ \cdot x$  که  $x$  عنصری دلخواه از  $\mathbb{R}^n$  است. داریم:

$$f(\underline{o}) = f(\circ \cdot x) = \circ \cdot f(x) = \underline{o}$$

(۲-۱۳) تحت اثر  $f$ ، تصویر هر زیرفضای خطی (به ترتیب هر زیرفضای مستوی) یک زیرفضای

خطی (به ترتیب یک زیرفضای مستوی) است.

اثبات. نخست حالت یک زیرفضای خطی  $E$  را در نظر بگیرید، باید ثابت کنیم

$f(E) = \{f(x) \mid x \in E\}$  یک زیرفضای خطی  $\mathbb{R}^m$  است. با استفاده از ضابطه (۱-۱۲) جلسه قبل

عمل می‌کنیم. اگر  $y$  و  $y'$  دو عنصر  $f(E)$  باشند، داریم  $y = f(x)$  و  $y' = f(x')$  برای  $x$  و  $x'$  مناسب در

$E$ . پس

$$y + y' = f(x) + f(x') = f(x + x')$$

چون  $x, x' \in E$  طبق ضابطه (۱۲-۳) جلسه قبل،  $x + x' \in E$  پس  $y + y' \in f(E)$  به همین ترتیب اگر  $r \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} ry &= rf(x) \\ &= f(rx) \quad \text{طبق (۱۲-۱)} \end{aligned}$$

و  $rx \in E$  طبق ۱۲-۳، پس  $ry \in f(E)$ . بدین ترتیب ثابت کرده‌ایم که تصویر یک زیرفضای خطی، خود یک زیرفضای خطی است. حال هر زیرفضای مستوی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$a + E = \{a + x \mid x \in E\}$$

که  $E$  یک زیرفضای خطی و  $a$  یک عنصر داده شده از  $E$  است. بنابراین هر عنصر تصویر به شکل  $f(a + x) = f(a) + f(x)$  می‌باشد. چون  $f(x) \in f(E)$  و در بالا دیدیم که  $f(E)$  یک زیرفضای خطی است، تصویر زیرفضای مستوی بالا برابر انتقال یافته  $f(E)$  توسط عنصر ثابت  $f(a)$  است، پس مستوی است.  $\square$

توجه کنید که در استدلال بالا، در صورتی که  $f(a) \in f(E)$ ، تصویر زیرفضای مستوی یک زیرفضای خطی خواهد بود که تناقض نیست زیرا که زیرفضاهای خطی خود نوعی زیرفضای مستوی هستند. ضمناً اگر دو زیرفضای موازی و همبعد  $a + E$  و  $b + E$  در  $\mathbb{R}^n$  را در نظر بگیریم؛ طبق آنچه در بالا مشاهده شد، تصویر آنها به ترتیب  $f(a) + f(E)$  و  $f(b) + f(E)$  خواهد بود، یعنی دو زیرفضای موازی (یا منطبق) از  $\mathbb{R}^m$ :

(۱۳-۳) اگر  $E_1$  و  $E_2$  دو زیرفضای مستوی همبعد و موازی از  $\mathbb{R}^n$  باشند،  $f(E_1)$  و  $f(E_2)$  همبعد و موازی (یا منطبق) خواهند بود.  $\square$

(۱۸-۴) مثال. تابع خطی  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  را که با ماتریس  $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & -2 \end{bmatrix}$  مشخص می‌شود در نظر می‌گیریم. تصویر هر نقطه  $(x, y, z)$  تحت  $f$  را به  $(X, Y, Z)$  نمایش می‌دهیم:

$$(X, Y, Z) = f(x, y, z). \text{ داریم:}$$

$$X = -x + y, \quad Y = 2x + y - z, \quad Z = 5x + y - 2z \quad (2)$$

توجه کنید که  $Z = 2Y - X$ ، پس همه نقاط  $\mathbb{R}^3$  به یک صفحه گذرا از  $z=0$  (زیرفضای خطی دوبعدی)، یعنی  $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$  نگاشته می‌شوند. حال اثر  $f$  را بر چند صفحه خاص در نظر می‌گیریم. نخست صفحه مختصاتی  $xy$ ، متشکل از نقاط  $(x, y, 0)$  را در نظر بگیرید. طبق (۲) داریم:

$$f(x, y, 0) = (-x + y, 2x + y, 5x + y)$$

ادعا می‌کنیم هر نقطه صفحه  $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$  در تصویر صفحه مختصاتی  $xy$  قرار دارد. اگر  $(x_1, x_2, -x_1 + 2x_2)$  یک چنین نقطه‌ای باشد، باید نشان دهیم دستگاه زیر دارای جواب بر حسب  $x$  و  $y$  است:

$$\begin{cases} -x + y = x_1 \\ 2x + y = x_2 \\ 5x + y = -x_1 + 2x_2 \end{cases}$$

دو معادله اول جواب منحصر به فرد  $x = \frac{-x_1 + x_2}{3}, y = \frac{2x_1 + x_2}{3}$  را دارند که با جایگزینی ملاحظه می‌کنیم در معادله سوم نیز صدق می‌کند. پس در واقع صفحه مختصاتی  $xy$  به طور یک به یک بر صفحه تصویر همه  $\mathbb{R}^3$  نگاشته می‌شود. محاسبه مشابه با صفحات مختصاتی  $yz$  و  $zx$  نشان خواهد داد که هر یک از این صفحات نیز به طور یک به یک بر  $f(\mathbb{R}^3)$  نگاشته می‌شود. حال تصویر صفحه  $x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$  را تحت  $f$  بررسی می‌کنیم. نقاط این صفحه به شکل  $(x, y, x + 2y)$  هستند. طبق (۲) داریم:

$$f(x, y, x + 2y) = (-x + y, x - y, 3x - 3y)$$



ملاحظه می‌کنیم که هر نقطهٔ تصویر مضربی از سه‌تایی  $(-1, 1, 3)$  است؛ یعنی تصویر، خط راست

$$\frac{x}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{3}$$

می‌باشد. بدین ترتیب تصویر صفحاتی که تاکنون بررسی کردیم، بعضی یک صفحه (دوبعدی) و بعضی یک خط راست (یک بعدی) می‌شوند. سؤالی که مطرح می‌شود این است که چه قانونی بر تعیین بعد تصویر حاکم است؟ بررسی‌های بعدی این موضوع را روشن خواهد ساخت.

برای تابع خطی (۱)، هستهٔ  $f$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم و به  $\ker(f)$  نمایش می‌دهیم:

$$\ker(f) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = \underline{0}\} \quad (3)$$

(۱۳-۴)  $\ker(f)$  یک زیرفضای خطی  $\mathbb{R}^n$  است.

اثبات. اگر  $x$  و  $x'$  در  $\ker(f)$  باشند، باید نشان دهیم  $x + x'$  در  $\ker(f)$  است، و اگر به علاوه  $r \in \mathbb{R}$ ، باید نشان دهیم  $rx$  نیز در  $\ker(f)$  است:

$$f(x + x') = f(x) + f(x') \quad \text{طبق ۱-۱۲}$$

$$= \underline{0} + \underline{0} = \underline{0}$$

$$f(rx) = rf(x) \quad \text{طبق ۱-۱۲}$$

$$= r\underline{0} = \underline{0}$$

و حکم به اثبات می‌رسد.  $\square$

حال طبق (۱۳-۳)، اگر  $L$  از انتقال هستهٔ  $f$  با یک عضو ثابت  $\mathbb{R}^n$  به دست آید، تصویر  $L$  تحت  $f$  موازی و همبعد تصویر هسته تحت  $f$  است، ولی هسته به تک نقطهٔ  $\{0\}$  نگاشته می‌شود؛ بنابراین تصویر هر  $L$  یک تک نقطه خواهد بود:

(۱۳-۵) اگر  $K$  هسته  $f$  باشد و  $a \in \mathbb{R}^n$ ، تصویر  $a + K$  تحت  $f$  تک نقطه  $\{f(a)\}$  است. بالعکس، اگر  $b$  نقطه‌ای در  $\mathbb{R}^m$  باشد،  $f^{-1}(b)$  (= مجموعه تراز منسوب به  $b$  = مجموعه نقاطی که تحت  $f$  به  $b$  نگاشته می‌شوند) یا تهی است یا یک زیرفضای مستوی همبند و موازی  $K$  است.

اثبات. قسمت اول حکم را در بالا توضیح دادیم و برای قسمت دوم فرض کنید  $f^{-1}(b)$  تهی نباشد، آنگاه عنصری  $a$  در  $\mathbb{R}^n$  وجود دارد که  $f(a) = b$ . نشان می‌دهیم:

$$f^{-1}(a) = a + K$$

نخست برای هر عنصر  $a + K$ ، یعنی عنصر به شکل  $a + x$  که  $x \in K$  داریم:

$$\begin{aligned} f(a + x) &= f(a) + f(x) \\ &= f(a) \\ &= b \end{aligned}$$

بالعکس اگر  $a' \in f^{-1}(b)$ ، می‌نویسیم:

$$a' = a + (a' - a) \quad (۴)$$

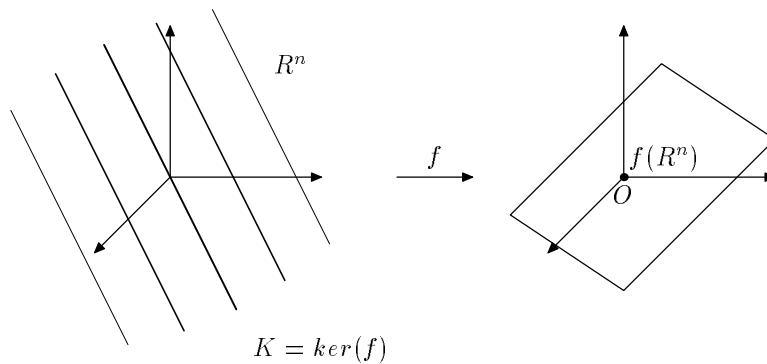
$a' - a$  در هسته است زیرا که

$$\begin{aligned} f(a' - a) &= f(a') - f(a) \\ &= b - b \\ &= \underline{0} \end{aligned}$$

بنابراین (۴) نشان می‌دهد که هر عضو  $f^{-1}(b)$  مجموع  $a$  با یک عنصر هسته است و اثبات حکم کامل می‌شود.  $\square$

نتیجه‌های اخیر تصویری ساده و به لحاظی کامل از عملکرد یک تابع خطی  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  ارائه می‌کند. طبق (۱۳-۲)، کل  $\mathbb{R}^n$  به یک زیرفضای خطی  $\mathbb{R}^m$  نگاشته می‌شود، هسته به نقطه  $\underline{0}$  و

زیرفضاهای موازی و همبند هسته هر یک به تمامی به یک نقطه تصویر فرستاده می‌شوند. در واقع از هر نقطه  $\mathbb{R}^n$  یک زیرفضای منحصر به فرد همبند و موازی  $K$  می‌گذرد که همه نقاط آن به یک



شکل ۱

نقطه در  $f(\mathbb{R}^n)$  نگاشته می‌شوند. می‌توان این توصیف عملکرد تابع خطی را این گونه تجسم کرد که در اثر عملکرد تابع خطی هر یک از زیرفضاهای مستوی موازی و همبند هسته به یک نقطه در  $\mathbb{R}^m$  منقبض می‌شود و حاصل یک زیرفضای خطی  $\mathbb{R}^m$  است. به نظر می‌آید که در اثر انقباض این زیرفضاهای مستوی به تک نقطه‌ها، باید تصویر  $\mathbb{R}^n$  تحت  $f$ ، بعدی برابر  $(n - k)$  داشته باشد که  $k$  بعد هسته است. در واقع حکم کلی زیر برقرار است:

(۱۳-۶) فرض کنید  $E$  یک زیرفضای خطی  $\mathbb{R}^n$  باشد، در این صورت:

$$\dim E = \dim f(E) + \dim(E \cap \ker(f)) \quad (۵)$$

(در اینجا  $\dim$  مخفف dimension به معنای بُعد است)

اثبات. مقدمتاً توجه کنید که اشتراک هر دو زیرفضای خطی از  $\mathbb{R}^n$  یک زیرفضای خطی است، بنابراین  $E \cap \ker(f)$  یک زیرفضای خطی است و بُعد آن معنی دارد. برای مشاهده این امر فرض کنید  $E_1$  و  $E_2$  دو زیرفضای خطی  $\mathbb{R}^n$  باشند. اگر  $x$  و  $x'$  هر دو در  $E_1 \cap E_2$  باشند، چون هر دو در  $E_1$

و هر دو در  $E_2$  هستند، داریم  $x + x' \in E_1$  و  $x + x' \in E_2$  پس  $x + x' \in E_1 \cap E_2$ . همچنین اگر  $x \in E \cap E'$  و  $x \in \mathbb{R}$  داریم  $rx \in E_1$  و  $rx \in E_2$  پس  $rx \in E_1 \cap E_2$ .

حال به اثبات حکم می‌پردازیم. فرض کنید  $\dim(E \cap \ker(f)) = l$ . در این صورت مجموعه مستقل خطی  $\{A_1, \dots, A_l\}$  از عناصر  $E \cap \ker(f)$  وجود دارد که پایه برای این زیرفضاست، یعنی  $E \cap \ker(f) = \langle A_1, \dots, A_l \rangle$ . اگر  $E \cap \ker(f) = E$  آنگاه لزوماً  $E \subset \ker(f)$ ، همه نقاط  $E$  به صفر نگاشته می‌شوند،  $\dim f(E) = 0$ ، و فرمول (۵) برقرار است. اگر  $E \cap \ker(f)$  همه  $E$  نباشد، عنصری  $A_{l+1}$  در  $E$  وجود دارد که ترکیبی خطی از  $A_1, \dots, A_l$  نیست. مجموعه  $\{A_1, \dots, A_{l+1}\}$  مستقل خطی است (دقیقاً چرا؟). اگر  $\langle A_1, \dots, A_{l+1} \rangle = E$  داریم  $\dim E = l + 1$  و  $f(E)$  از مضارب  $f(A_{l+1})$  تشکیل شده است زیرا که

$$\begin{aligned} f(t_1 A_1 + \dots + t_l A_l + t_{l+1} A_{l+1}) &= \sum_{i=1}^l t_i f(A_i) + t_{l+1} f(A_{l+1}) \\ &= t_{l+1} f(A_{l+1}) \end{aligned}$$

از طرفی دیگر  $f(A_{l+1}) \neq 0$  چون  $A_{l+1} \notin \ker(f)$ . بنابراین  $\dim f(E) = 1$  و مجدداً فرمول (۵) برقرار است. حال اگر  $\langle A_1, \dots, A_{l+1} \rangle$  همه  $E$  نباشد، عنصری  $A_{l+2}$  از  $E$  به مجموعه  $\{A_1, \dots, A_{l+1}\}$  می‌افزاییم که ترکیبی خطی از  $A_1, \dots, A_{l+1}$  نباشد و استدلال بالا را تکرار می‌کنیم. به طور کلی، اگر  $\dim E = k$ ، در  $k - l$  گام به مجموعه مستقل خطی  $k$  عضوی  $\{A_1, \dots, A_l, A_{l+1}, \dots, A_k\}$  می‌رسیم که لزوماً یک پایه برای  $E$  است. حال بعد  $f(E)$  را محاسبه می‌کنیم. برای هر عضو  $x$  از  $E$  داریم:

$$\begin{aligned} x &= t_1 A_1 + \dots + t_l A_l + t_{l+1} A_{l+1} + \dots + t_k A_k \\ f(x) &= t_1 f(A_1) + \dots + t_l f(A_l) + t_{l+1} f(A_{l+1}) + \dots + t_k f(A_k) \quad \text{بنابر ۱-۱۲} \\ &= t_{l+1} f(A_{l+1}) + \dots + t_k f(A_k) \quad (\text{چون } A_i \in \ker(f) \text{ برای } i = 1, \dots, l) \end{aligned}$$

بنابراین هر عضو تصویر  $E$  یک ترکیب خطی از  $f(A_{l+1}), \dots, f(A_k)$  است. اگر ثابت کنیم مجموعه  $\{f(A_{l+1}), \dots, f(A_k)\}$  مستقل خطی است، نتیجه می‌شود که  $\dim(f(E)) = k - l$  و رابطه (۵) به

اثبات می‌رسد. برای اثبات این واقعیت فرض کنید مجموعه فوق مستقل خطی نباشد، یعنی اعداد حقیقی  $c_{l+1}, \dots, c_k$  وجود داشته باشند که:

$$c_{l+1}f(A_{l+1}) + \dots + c_k f(A_k) = \underline{0}$$

$$f(c_{l+1}A_{l+1} + \dots + c_k A_k) = \underline{0}$$

این نشان می‌دهد که  $c_{l+1}A_{l+1} + \dots + c_k A_k$  عضوی از هسته  $f$  است و در ضمن چون  $A_{l+1}, \dots, A_k \in E$ ،  $c_{l+1}A_{l+1} + \dots + c_k A_k \in E \cap \ker f$  است. بنابراین اعداد حقیقی  $c_1, \dots, c_l$  وجود دارند که:

$$c_{l+1}A_{l+1} + \dots + c_k A_k = c_1 A_1 + \dots + c_l A_l$$

$$c_1 A_1 + \dots + c_l A_l - c_{l+1}A_{l+1} - \dots - c_k A_k = \underline{0}$$

با توجه به استقلال خطی  $\{A_1, \dots, A_k\}$  همه ضرایب باید صفر باشند، بالاخص  $c_{l+1} = \dots = c_k = 0$ . و اثبات استقلال خطی  $\{f(A_{l+1}), \dots, f(A_k)\}$  و حکم (۵) به اتمام می‌رسد. □

با توجه به ۱۳-۶، اکنون می‌توانیم با نگاهی مجدد به مثال ۱۸-۴، این مطلب که تصاویر صفحات گوناگون تحت تابع خطی آن مثال، بعضی دوبعدی و بعضی یک بعدی بودند به طور کامل تجزیه و تحلیل کنیم. برای این کار نخست هسته  $f$  در مثال ۱۸-۴ را پیدا می‌کنیم. باید داشته باشیم:

$$A|x\rangle = |\underline{0}\rangle$$

یا  $(0, 0, 0) = (5x_1 + x_2 - 2x_3, 2x_1 + x_2 - x_3, -x_1 + x_2)$ . بنابراین  $x_2 = x_1$  و  $x_3 = 3x_1$ . نتیجه این که هسته  $f$  عبارت است از خط راست:

$$\frac{x_1}{1} = \frac{x_2}{1} = \frac{x_3}{3} \quad (6)$$

حال اگر  $E$  یک زیرفضای خطی دوبعدی  $\mathbb{R}^3$  باشد، بعد تصویر  $E$  طبق ۱۸-۶ برابر  $l-2$  است که  $l$  بعد اشتراک  $E$  با هسته است. دو امکان وجود دارد، یا اشتراک  $E$  و هسته فقط  $\{\underline{0}\}$  است که در این

صورت  $l = 0$  و تصویر  $E$  دوبعدی است، و یا اشتراک  $E$  و هسته یک بعدی است، یعنی هسته به تمامی در  $E$  قرار دارد، که در این صورت  $l = 1$  و تصویر یک بعدی است. در مثال ۱۸-۴، هر یک از صفحات مختصاتی با هسته (یعنی خط راست (۶)) فقط در اشتراک دارند، بنابراین تصویر هر یک، دوبعدی است. ولی صفحه  $x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$  شامل خط راست (۶) است، یعنی برای آن  $l = 1$ ، و در نتیجه تصویر آن تحت  $f$ ، یک بعدی می‌باشد.

## نگاشت‌های خطی (۴)

آنچه در جلسه قبل دیدیم تصویر به نسبت جامعی از عملکرد تابع‌های خطی روی زیرفضاهای مستوی می‌دهد. گزاره‌های ذکر شده اکثراً به طور مستقیم به زیرفضاهای خطی مربوط می‌شدند ولی نتیجه‌گیری درست در مورد زیرفضاهای مستوی دشوار نیست. مثلاً آخرین گزاره:

$$\dim(E) = \dim(f(E)) + \dim(E \cap \ker f) \quad (۱)$$

برای زیرفضاهای خطی  $E$  برقرار است. اگر  $E'$  یک زیرفضای مستوی همبند و موازی  $E$  باشد، یعنی  $E' = p + E$ ، دیگر  $E' \cap \ker f$  مطرح نیست، بلکه می‌دانیم که  $\dim f(E') = \dim f(E)$  (تصویر زیرفضاهای مستوی موازی همبند، موازی و همبند است)، پس

$$\dim(E') = \dim f(E') + \dim(E \cap \ker f) \quad (۲)$$

یعنی در اینجا بعد اشتراک انتقال یافته  $E'$  به  $\mathcal{O}$  با هسته، تعیین کننده افت بعد  $E'$  در اثر عملکرد  $f$  است. با توجه به این تذکر، به مثال جلسه قبل باز می‌گردیم.

مثال. تابع خطی  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  را با ماتریس  $\begin{bmatrix} -۱ & ۱ & ۰ \\ ۲ & ۱ & -۱ \\ -۵ & ۱ & -۲ \end{bmatrix}$  را بررسی می‌کنیم. هسته این تابع خط راست  $x_1 = x_2 = x_3$  است. دیدیم که زیرفضاهای خطی دوبعدی شامل هسته به یک خط راست و زیرفضاهای خطی دوبعدی که فقط در  $\mathcal{O}$  با هسته اشتراک دارند به تمامی صفحه  $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$  نگاشته می‌شوند. حال اگر  $F$  یک صفحه دلخواه در  $\mathbb{R}^3$  باشد (زیرفضای مستوی

دو بعدی)، برای تعیین بعد تصویر آن باید انتقال یافته آن به مبدأ،  $F^\circ$  را در نظر بگیریم. اگر  $F^\circ$  شامل هسته باشد، یعنی  $F$  موازی هسته باشد، تصویر  $F$  یک خط راست می شود. در غیر این صورت،  $F^\circ$  با هسته فقط در  $\underline{e}$  مشترک است و تصویر آن دو بعدی می شود. اکنون وضعیت تصویر خطوط راست  $\mathbb{R}^3$  را تحت اثر  $f$  بررسی می کنیم. اگر خط راست  $L$  به مبدأ منتقل شود تا خط راست  $L^\circ$  به دست آید،  $L^\circ$  یا برابر هسته است، که در این صورت  $L$  یک خط موازی هسته است و یا  $L^\circ$  با هسته فقط در  $\underline{e}$  مشترک است. در حالت اول تصویر  $L$  یک نقطه می شود و در حالت دوم تصویر آن یک خط راست است.

اکنون به ذکر چند نکته تکمیلی در مورد بحث جلسه گذشته می پردازیم. پس تابع خطی

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

مورد نظر است.

(۱-۱۴) شرطی لازم و کافی برای یک به یک بودن  $f$  این است که  $\ker(f) = \{0\}$ . در این حالت لزوماً  $n \leq m$ .

اثبات. اگر عنصری  $x \neq \underline{e}$  در هسته باشد، چون  $f(x) = f(\underline{e}) = \underline{e}$ ،  $f$  یک به یک نیست. حال فرض کنید  $\ker f = \{\underline{e}\}$  و  $f(x_1) = f(x_2)$  چون  $f$  خطی است نتیجه می گیریم که  $f(x_1 - x_2) = \underline{e}$ ، یعنی  $x_1 - x_2 \in \ker(f)$  پس طبق فرض  $x_1 = x_2$  و یک به یک بودن به اثبات می رسد. در این حالت  $\square$   $\dim(f(\mathbb{R}^n)) = n$ ، و چون  $f(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R}^m$ ، نتیجه می گیریم که  $n \leq m$ .

در فرمول (۱)، وقتی  $E = \mathbb{R}^n$  داریم:

$$n = \dim(f(\mathbb{R}^n)) + \dim(\ker(f))$$

پوشا بودن  $f$  معادل این است که  $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^m$ ، یعنی  $n = m + \dim(\ker(f))$ . بنابراین:



(۱۴-۲) شرطی لازم و کافی برای پوشا بودن  $f$  این است که  $\dim(\ker(f)) = n - m$ . در این حالت لزوماً  $n \geq m$ .

□  
 برای تابع‌های  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ، یعنی در حالت  $m = n$ ، از (۱۴-۱) و (۱۴-۲) نتیجه می‌شود که:

□ (۱۴-۳) تابع خطی  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  یک به یک است اگر و تنها اگر پوشا باشد. می‌دانیم که شرطی لازم و کافی برای وجود تابع معکوس (وارون) یک به یک و پوشا بودن تابع است. بدین ترتیب وقتی  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  یک به یک (معادلاً پوشا) باشد، تابعی  $f^{-1}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  وجود دارد که

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad , \quad f(f^{-1}(x)) = x$$

ادعا می‌کنیم که  $f^{-1}$  نیز خطی است. فرض کنید  $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n$ . چون  $f$  پوشا است،  $x_1$  و  $x_2$  وجود دارند که  $y_1 = f(x_1)$  و  $y_2 = f(x_2)$ . بنابراین

$$\begin{aligned} f^{-1}(y_1 + y_2) &= f^{-1}(f(x_1) + f(x_2)) \\ &= f^{-1}(f(x_1 + x_2)) \quad \text{چون } f \text{ خطی است} \\ &= x_1 + x_2 \\ &= f^{-1}(y_1) + f^{-1}(y_2) \end{aligned}$$

به همین ترتیب اگر  $y = f(x)$  و  $r$  یک عدد حقیقی باشد،

$$\begin{aligned} f^{-1}(ry) &= f^{-1}(rf(x)) \\ &= f^{-1}(f(rx)) \quad \text{چون } f \text{ خطی است} \\ &= rx \\ &= rf^{-1}(y) \end{aligned}$$

چون  $f^{-1}$  خطی است، به آن ماتریسی  $n \times n$ ،  $B$ ، منسوب می‌شود. اگر  $A$  ماتریس تابع خطی  $f$  باشد، رابطه  $B$  را با  $A$  بررسی می‌کنیم. داریم  $f \circ f^{-1} = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^n}$  و  $f^{-1} \circ f = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^n}$  تابع همانی

$\mathbb{R}^n$  است. از آنجا که ماتریس  $1_{\mathbb{R}^n}$  برابر  $I_n$  است و ترکیب تابع‌های خطی متناظر با حاصل ضرب ماتریس‌های مربوط است، داریم:

$$BA = I_n, \quad AB = I_n$$

چنین ماتریس  $B$  وارون یا معکوس ماتریس  $A$  خوانده می‌شود و معمولاً آن را به  $A^{-1}$  نمایش می‌دهیم.

مثال زیر نشان می‌دهد چگونه می‌توان بعضی مسائل هندسی را به بحث در مورد جواب‌های یک دستگاه معادله درجه یک تبدیل کرد و سپس از مطالب فوق در حل مسأله یاری جست.

مثال. فرض کنید  $E_1$  و  $E_2$  دو صفحه (زیرفضای مستوی دوبعدی) در  $\mathbb{R}^4$  هستند. نشان می‌دهیم:  
 (الف) اگر  $E_1 \cap E_2$  یک تک نقطه باشد و  $E'_1$  یک صفحه موازی  $E_1$  و  $E'_2$  یک صفحه موازی  $E_2$  باشد، آنگاه  $E'_1 \cap E'_2$  نیز یک تک نقطه است.

(ب) اگر  $E_1 \cap E_2$  یک خط راست باشد، صفحه‌ای  $E'_1$  موازی  $E_1$  و صفحه‌ای  $E'_2$  موازی  $E_2$  وجود دارند که  $E'_1 \cap E'_2$  تهی است.

فرض کنید  $E_1$  صفحه گذرا از  $p$  به موازات  $A_1$  و  $A_2$  باشد،  $\{A_1, A_2\}$  مستقل خطی، و  $E_2$  صفحه گذرا از  $q$  به موازات  $B_1$  و  $B_2$  و  $\{B_1, B_2\}$  مستقل خطی. این که  $E_1$  و  $E_2$  دقیقاً یک نقطه مشترک دارند بدین صورت قابل بیان است که چهارتایی منحصر به فردی  $(s_1, s_2, t_1, t_2)$  از اعداد حقیقی وجود دارد که:

$$p + s_1 A_1 + s_2 A_2 = q + t_1 B_1 + t_2 B_2 \quad (3)$$

حال  $p, q, A_1, A_2, B_1, B_2$  همه عناصر  $\mathbb{R}^4$ ، یعنی چهارتایی هستند. می‌نویسیم  
 $A_2 = (a_{12}, a_{22}, a_{32}, a_{42})$ ،  $A_1 = (a_{11}, a_{21}, a_{31}, a_{41})$ ،  $q = (q_1, \dots, q_4)$ ،  $p = (p_1, \dots, p_4)$   
 $B_2 = (b_{12}, b_{22}, b_{32}, b_{42})$ ،  $B_1 = (b_{11}, b_{21}, b_{31}, b_{41})$  پس اگر مؤلفه‌های اول تا چهارم دو طرف

(۳) را برابر قرار دهیم حاصل می شود:

$$\begin{cases} p_1 + s_1 a_{11} + s_2 a_{12} = q_1 + t_1 b_{11} + t_2 b_{12} \\ p_2 + s_1 a_{21} + s_2 a_{22} = q_2 + t_1 b_{21} + t_2 b_{22} \\ p_3 + s_1 a_{31} + s_2 a_{32} = q_3 + t_1 b_{31} + t_2 b_{32} \\ p_4 + s_1 a_{41} + s_2 a_{42} = q_4 + t_1 b_{41} + t_2 b_{42} \end{cases} \quad (4)$$

با انتقال جملات دارای  $s_1, s_2, t_1, t_2$  به سمت چپ و سایر جملات به سمت راست، دستگاه زیر حاصل

می شود:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & -b_{11} & -b_{12} \\ a_{21} & a_{22} & -b_{21} & -b_{22} \\ a_{31} & a_{32} & -b_{31} & -b_{32} \\ a_{41} & a_{42} & -b_{41} & -b_{42} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \\ q_3 - p_3 \\ q_4 - p_4 \end{bmatrix} \quad (5)$$

ماتریس  $4 \times 4$  سمت چپ یک تابع خطی  $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  تعریف می کند. اینکه  $E_1$  و  $E_2$  فقط یک نقطه اشتراک داشته باشند بدین صورت قابل بیان است که یک و تنها یک نقطه  $\mathbb{R}^4$  به نقطه  $(q-p)$  نگاشته می شود، مجموعه تراز،  $f^{-1}(q-p)$  تک عضوی است. می دانیم که همه مجموعه های تراز ناتهی از انتقال هسته به دست می آیند و با هم موازی هستند. پس در این حالت هسته برابر  $\{0\}$  است و در نتیجه  $f$  یک به یک و پوشا است. حال اگر به جای  $E_1$  و  $E_2$ ، دو زیرفضای موازی جایگزین کنیم، فقط طرف راست (۵) عوض می شود، ولی از آنجا که  $f$  یک به یک و پوشا است، مجدداً جواب منحصر به فردی  $(s_1, s_2, t_1, t_2)$  برای دستگاه به دست می آید، یعنی اشتراک دو زیرفضای موازی نیز یک تک نقطه است.

اکنون حالتی را در نظر بگیرید  $E_1 \cap E_2$  یک خط راست است. به زبان تابع های خطی، این مطلب را می توان به این صورت بیان کرد که مجموعه تراز  $f^{-1}(q-p)$  یک بعدی است. نتیجه می شود که هسته تابع خطی  $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  یک بعدی است. بنابراین  $f$  یک به یک نیست و طبق (۱۴-۳) پوشا نیست. بنابراین طرف راست (۵) را می توان طوری اختیار کرد که مجموعه تراز منسوب به آن تهی باشد. مثلاً با ثابت نگاه داشتن  $p$  و تغییر مناسب  $q$ ، می توان به چنین نقطه ای رسید. نتیجه این که با

انتقال موازی مناسب  $E_1$  و  $E_2$  می توان به دو صفحه غیر متقاطع رسید.

مثال بالا به خوبی نشان می دهد که بسیاری سؤال های مربوط به دستگاه های معادلات خطی را اکنون می توان به کمک اطلاعاتی که در مورد تابع های خطی کسب کرده ایم جواب داد. دستگاه کلی  $m$  معادله  $n$  مجهولی درجه یک را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (6)$$

یا به طور خلاصه:

$$A|x\rangle = |b\rangle \quad (7)$$

که در آن  $A = [a_{ij}]$ . دستگاهی که طرف چپ آن مانند بالا و طرف راست از صفر تشکیل شده باشد، دستگاه همگن (یا متجانس) وابسته به (6) یا (7) می نامند:

$$A|x\rangle = |0\rangle \quad (8)$$

جدول زیر رابطه بین جبر حل دستگاه های معادلات بالا و هندسه تابع های خطی را خلاصه می کند:

هندسه	جبر
یافتن مجموعه تراز منسوب $b$	حل (6) برای $b$ داده شده
ناهی بودن مجموعه تراز منسوب به $b$	وجود جواب به ازای $b$ داده شده
پوشا بودن تابع خطی $f$	وجود جواب به ازای هر $b$
هسته $\{0\}$	یگانگی جواب در صورت وجود
یافتن هسته	حل دستگاه همگن

چند نمونه از احکام جبری را که اکنون می توان با توسل به هندسه تابع های خطی جواب داد در زیر می آوریم. مثال های دیگری در تمرین ها آمده اند.

(۱۴-۴) اگر تعداد معادلات بیش از تعداد مجهول ها باشد، می توان  $b$  را طوری اختیار کرد که دستگاه جواب نداشته باشد.

اثبات. این حالت  $m > n$  است که طبق ۱۴-۲ تابع خطی مربوط پوشا نیست، یعنی  $b \in \mathbb{R}^m$  وجود دارد که  $f^{-1}(b)$  تهی است. □

(۱۴-۵) اگر  $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = \bar{x}$  یک جواب (۶) باشد، همه جواب‌های (۶) عبارتند از  $x + \bar{x}$  که در آن  $x$  یک جواب دستگاه همگن متناظر است.

اثبات. داریم  $f(\bar{x}) = b$ . اگر  $x$  یک جواب دستگاه همگن باشد، یعنی  $x$  در هسته  $f$  است، پس  $f(x + \bar{x}) = f(x) + f(\bar{x})$ . بالعکس فرض کنید  $\bar{x}$  جواب دیگری از (۶) باشد، آنگاه

$$f(\bar{x} - \bar{x}) = f(\bar{x}) - f(\bar{x}) = b - b = \underline{0}$$

پس  $\bar{x} - \bar{x}$  در هسته است و می‌توان نوشت  $\bar{x} = (\bar{x} - \bar{x}) + \bar{x}$ . □

حالت مهم  $m = n$  (تعداد مجهول = تعداد معادله) را در نظر بگیرید. دیدیم که در این حالت شرایط زیر معادل هستند:  $f$  یک به یک،  $f$  پوشا،  $f$  وارون‌پذیر، هسته  $f = \{0\}$ . در این حالت، ماتریس مربوط،  $A$ ، نیز وارون‌پذیر است و با ضرب کردن دو طرف (۷) در  $A^{-1}$  از سمت چپ، جواب (منحصر به فرد) دستگاه به دست می‌آید:

$$|x\rangle = A^{-1}|b\rangle \quad (9)$$

## حجم و دترمینان (۲)

هدف ما در این بخش تعمیم مفاهیم دترمینان و حجم به  $\mathbb{R}^n$  است. نخست تعریف هندسی و تعریف

جبری دترمینان ماتریس‌های  $2 \times 2$  و  $3 \times 3$  را یادآوری می‌کنیم. فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \text{یا} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

ستون‌های ماتریس  $2 \times 2$  را به ترتیب از چپ به راست به  $A^1$  و  $A^2$ ، و ستون‌های ماتریس  $3 \times 3$  را به

$A^1$ ،  $A^2$  و  $A^3$  نمایش می‌دهیم. در  $\mathbb{R}^2$ ، متوازی‌الاضلاع  $P(A)$  را به صورت

$$P(A) = \{t_1 A^1 + t_2 A^2 \mid 0 \leq t_1 \leq 1, 0 \leq t_2 \leq 1\}$$

و در  $\mathbb{R}^3$ ، متوازی‌الاضلاع  $P(A)$  را به صورت

$$P(A) = \{t_1 A^1 + t_2 A^2 + t_3 A^3 \mid 0 \leq t_1 \leq 1, 0 \leq t_2 \leq 1, 0 \leq t_3 \leq 1\}$$

در نظر می‌گیریم.

### (۱-۱۱) تعریف هندسی دترمینان

در حالت  $2 \times 2$ : مساحت  $|\det A| = P(A)$

$$\det A = \begin{cases} + & \text{اگر زوج مرتب } (A^1, A^2) \text{ راستگرد باشد} \\ - & \text{اگر زوج مرتب } (A^1, A^2) \text{ چپگرد باشد} \\ 0 & \text{اگر } \{A^1, A^2\} \text{ وابسته خطی باشد} \end{cases}$$

در حالت  $3 \times 3$ : حجم  $|\det A| = P(A)$

$$\det A \text{ علامت} = \begin{cases} + & \text{اگر سه تایی مرتب } (A^1, A^2, A^3) \text{ راستگرد باشد} \\ - & \text{اگر زوج مرتب } (A^1, A^2, A^3) \text{ چپگرد باشد} \\ \circ & \text{اگر } \{A^1, A^2, A^3\} \text{ وابسته خطی باشد} \end{cases}$$

(۱۱-۲) تعریف جبری دترمینان

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (۱)$$

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \quad (۲)$$

برای تعمیم این مفاهیم به ماتریس‌های  $n \times n$  و  $\mathbb{R}^n$ ، طبعاً ما ذهنیتی پیشینی نسبت "به حجم  $n$ -بعدی" و "راستگرد بودن یک  $n$ -تایی بردارها در  $\mathbb{R}^n$ " نداریم. بنابراین راهبرد ما این خواهد بود که تعریف جبری را به گونه‌ای تعمیم دهیم که قدرمطلق آن خواصی مشابه مساحت و حجم در  $\mathbb{R}^n$  را داشته باشد و علامت آن،  $n$ -تایی‌های برداری مستقل خطی را به دو دسته "راستگرد" و "چپگرد" تقسیم کند به نحوی که قرابت مورد نظر با دوگونگی متناظر در  $\mathbb{R}^2$  و  $\mathbb{R}^3$  برقرار شود. به این منظور سه ویژگی دترمینان در حالت  $2 \times 2$  و  $3 \times 3$  را در زیر مورد نظر قرار می‌دهیم و خواهیم دید که به طور کلی برای ماتریس‌های  $n \times n$  یک و تنها یک روش نسبت دادن یک عدد به یک ماتریس وجود دارد که این سه ویژگی را داراست. این عدد را "دترمینان ماتریس" نام خواهیم گذارد.

پایه متداول  $\mathbb{R}^n$ ، یعنی  $(e_1, \dots, e_n)$  را در نظر بگیرید. مقصود از مکعب  $n$ -بعدی واحد، مجموعه

زیر است:

$$K^n = \{t_1 e_1 + \dots + t_n e_n \mid 0 \leq t_1 \leq 1, \dots, 0 \leq t_n \leq 1\} \quad (3)$$

برای  $n = 1$  داریم  $K^1 = [0, 1]$ ، برای  $n = 2$   $K^2 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$  و برای

$$K^3 = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}, n = 3 \quad (\text{شکل ۱})$$

به طور کلی، برای  $n$  عضو  $A^1, \dots, A^n$  در  $\mathbb{R}^n$ ، متوازی السطوح  $n$ -بعدی ایجاد شده توسط  $A^1, \dots, A^n$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$P(A^1, \dots, A^n) = \{t_1 A^1 + \dots + t_n A^n \mid 0 \leq t_i \leq 1, i = 1, \dots, n\} \quad (4)$$

اگر  $n$ -تایی‌های  $A^1$  تا  $A^n$  را به ترتیب به عنوان ستون‌های یک ماتریس  $A$  در نظر می‌گیریم،  $P(A^1, \dots, A^n)$  را به طور خلاصه به  $P(A)$  نمایش می‌دهیم.

### (۱۱-۳) سه ویژگی اساسی دترمینان (برای ماتریس‌های $2 \times 2$ و $3 \times 3$ )

(۱۱-۳-۱) دترمینان نسبت به هر ستون خطی است اگر سایر ستون‌های ثابت نگاه داشته شوند.

مقصود از "خطی بودن" برقراری دو شرط ۱-۷ است، یعنی اگر همه درایه‌های یک ستون در عددی  $r$  ضرب شوند، دترمینان در  $r$  ضرب می‌شود. اگر یک ستون (به عنوان یک  $n$ -تایی عددی) برابر مجموع دو ستون باشد، دترمینان برابر مجموع دترمینان‌های ماتریس‌هایی خواهد شد که از تفکیک دو ستون به دست می‌آیند. مثلاً:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} + a'_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + a'_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + a'_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a'_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a'_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

این دو شرط به سادگی از تعریف جبری (۱) و (۲) به دست می‌آیند. نکته این است که در هر جمله سمت راست (۱) و (۲) فقط یک درایه از هر ستون ظاهر می‌شود و با درجه یک. وقتی  $r > 0$ ، تعبیر



هندسی شرط اول این است که با ضرب کردن طول یک ضلع متوازی الاضلاع (به ترتیب یک ضلع متوازی السطوح) در  $r$  و ثابت نگاه داشتن اضلاع دیگر، مساحت متوازی الاضلاع (به ترتیب حجم متوازی السطوح) در  $r$  ضرب می شود. وقتی  $r < 0$ ، جهت گردش (راستگردی یا چپگردی) اضلاع معکوس می شود، بنابراین علامت دترمینان عوض می شود (شکل ۲).

تعبیر هندسی شرط دوم در حالت  $n = 2$  در شکل ۳ نمایش داده شده است. اگر یک ضلع متوازی الاضلاع، مثلاً ضلع  $u$ ، برابر مجموع  $u' + u''$  باشد به طوری که  $(u, v)$ ،  $(u', v)$  و  $(u'', v)$  هر سه راستگرد یا هر سه چپگرد باشند، مساحت  $P(u, v)$  برابر مجموع مساحت های  $P(u', v)$  و  $P(u'', v)$  می شود. وقتی جهت گردش سه دوتایی یکسان نباشد، باید علامت دترمینان را نیز منظور کرد. تعبیر مشابهی در حالت سه بعدی برقرار است و این حکم را می توان از اینکه مساحت برابر  $|u \times v|$  و حجم برابر  $|(u \times v) \cdot w|$  است نتیجه گرفت.

اکنون ویژگی اساسی دوم دترمینان را بیان می کنیم:

(۱۱-۳-۲) دترمینان نسبت به ستون ها "ضدمتقارن" است، یعنی هرگاه جای دو ستون تعویض شود، دترمینان در  $(-1)$  ضرب می شود.

این مطلب را می توان به طور جبری از تعریف های جبری (۱) و (۲) مشاهده کرد. تعبیر هندسی این است که تعویض ترتیب دو ضلع جهت گردش را معکوس می کند. توجه کنید که اگر  $k$  بار تعویض ستونی صورت گیرد، هر بار دترمینان در  $(-1)$  ضرب می شود، بنابراین پس از  $k$  تعویض، دترمینان در  $(-1)^k$  ضرب خواهد شد.

بالاخره، ویژگی اساسی سوم دترمینان به شرح زیر است:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 1, \quad \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1 \quad (11-3-3)$$

در حالت  $2 \times 2$ ، این بدین معنی است که مساحت مربع واحد برابر یک است و دوتایی مرتب

$(e_1, e_2)$  راستگرد می‌باشد. مشابهاً در حالت  $3 \times 3$ ، حجم مکعب واحد برابر یک است و سه‌تایی مرتب  $(e_1, e_2, e_3)$  راستگرد است.

خواهیم دید که این سه ویژگی دترمینان را به طور منحصر به فرد مشخص می‌کنند. لازم است نخست مفهوم "ضدتقارن" را کمی بیشتر بررسی کنیم. به طور کلی جابجا کردن ترتیب  $n$  شیء، مانند  $n$  ستون یک ماتریس  $n \times n$ ، یک "جایگشت" خوانده می‌شود. اگر  $n$  شیء را با شماره‌گذاری به مجموعه  $\{1, 2, \dots, n\}$  نمایش دهیم، یک جایگشت  $\{1, 2, \dots, n\}$  در واقع یک تابع یک به یک و پوشا از  $\{1, \dots, n\}$  به خود آن است.

$$\sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$$

مقصود از  $\sigma(i)$  جای جدید  $i$  است. تابع همانی جایگشتی است که هر یک از  $1$  تا  $n$  را سر جای خود نگاه می‌دارد. یک نوع جایگشت ساده، "تبادل" است. مقصود از یک تبادل یا ترانهش جایگشتی است که  $(n-2)$  عنصر را تثبیت می‌کند و جای دو عنصر باقیمانده را تعویض می‌کند. مثلاً

$$1 \rightarrow 1, \quad 2 \rightarrow 3, \quad 3 \rightarrow 2, \quad 4 \rightarrow 4$$

یک تبادل  $\{1, 2, 3, 4\}$  است.

(۱۱-۴) قضیه. هر جایگشت  $\{1, \dots, n\}$  را می‌توان به صورت ترکیبی متناهی از تبادلهای نمایش داد. روش نمایش یکتا نیست ولی تعداد تبادلهای لازم همواره زوج یا همواره فرد است.

برهان. حکم اول را می‌توان با استقرای ثابت کرد. برای  $n = 1$ ، حکم واضح است. فرض کنید حکم تا  $n$  ثابت شده است، آن را برای  $(n+1)$  ثابت می‌کنیم. پس فرض کنید  $\sigma$  یک جایگشت  $\{1, \dots, n, n+1\}$  است. اگر  $\sigma$  همانی باشد، می‌توان نوشت  $\sigma = \tau \circ \tau$  که  $\tau$  یک تبادل دلخواه است. اگر  $\sigma$  همانی نباشد،  $\sigma$  دست کم یک  $i$  را جابجا می‌کند، مثلاً  $\sigma(i) = j \neq i$ . حال تبادل  $\rho$  را در نظر بگیرید که بدین صورت تعریف می‌شود:  $\rho(i) = j$ ،  $\rho(j) = i$  و  $\rho(k) = k$  اگر  $k \neq i, j$  ترکیب  $\rho \circ \sigma$

جایگشتی است که  $i$  را تثبیت می کند زیرا که  $(\rho \circ \sigma)(i) = \rho(j) = i$ . بدین ترتیب می توان  $\rho \circ \sigma$  را یک جایگشت  $n$  شیء  $\{1, \dots, i-1, i+1, \dots, n+1\}$  تلقی کرد. طبق فرض استقراء،  $\rho$  باید ترکیب تعدادی تبادله  $\tau_i$  باشد (که  $i$  را ثابت نگاه می دارند)،  $\rho \circ \sigma = \tau_k \circ \dots \circ \tau_1$ . حال اگر روی دو طرف، تبادله  $\rho$  را اثر دهیم، چون  $\rho \circ \rho = \text{Id}$ ، نتیجه می شود که  $\sigma = \rho \circ \tau_k \circ \dots \circ \tau_1$  یعنی  $\sigma$  ترکیبی از تبادله ها است.

برای حکم دوم نخست به هر جایگشت  $\sigma$  از  $\{1, \dots, n\}$  عدد  $\varepsilon(\sigma)$  را به صورت زیر نسبت می دهیم:

$$\varepsilon(\sigma) = \frac{1}{(1)!(2)!\dots(n-1)!} \prod_{i < j} (\sigma(j) - \sigma(i)) \quad (5)$$

نشان می دهیم که  $\varepsilon(\sigma) = \pm 1$ . توجه کنید که به ازای هر  $k, l \in \{1, \dots, n\}$ ،  $k \neq l$  جمله  $(k-l)$  یا  $(l-k)$  یک و فقط یک بار در حاصل ضرب سمت راست ظاهر می شود، بنابراین می توان نوشت:

$$\begin{aligned} \prod_{i < j} (\sigma(i) - \sigma(j)) &= \pm \prod_{k < l} (l - k) \\ &= \pm (\prod_{1 < l} (l - 1)) (\prod_{2 < l} (l - 2)) \dots (\prod_{n-1 < l} (l - (n-1))) \end{aligned}$$

و طرف راست برابر  $(1)!\dots(n-1)!$  است. بنابراین  $\varepsilon(\sigma) = \pm 1$ . حال اثر ترکیب یک تبادله  $\tau$  را با  $\sigma$  بر  $\varepsilon(\sigma)$  بررسی می کنیم. نشان می دهیم  $\varepsilon(\tau \circ \sigma) = -\varepsilon(\sigma)$ . فرض کنید تبادله  $\tau$  دو عدد متمایز  $\mu$  و  $\nu$  را جابجا می کند و سایر اعداد را ثابت نگاه می دارد، مثلاً  $\mu < \nu$ . در حاصل ضرب طرف راست (5) جملات  $(\sigma(j) - \sigma(i))$  که در آنها  $\mu, \nu$  و  $\sigma(j) \neq \mu, \nu$  و  $\sigma(i) \neq \mu, \nu$  تغییر نمی کنند، داریم:

$$(\tau \circ \sigma)(j) - (\tau \circ \sigma)(i) = \sigma(j) - \sigma(i)$$

یکی از دو جمله  $(\nu - \mu)$  یا  $(\mu - \nu)$  یک و فقط یک بار به صورت  $(\sigma(i) - \sigma(j))$  ظاهر می شود که با اثر دادن  $\tau$  در  $(-1)$  ضرب می شود. سایر جملات  $(\sigma(j) - \sigma(i))$  را که در آنها یکی از جمله ها برابر  $\mu$  یا  $\nu$  است. می توان دوتا، دوتا، به صورت زیر در نظر گرفت:

$$\pm (\sigma(k) - \nu)(\sigma(k) - \mu) \quad , \quad \sigma(k) \neq \mu, \nu \quad (6)$$

و (۶) تحت اثر  $\tau$  تغییر علامت نمی دهد:

$$\begin{aligned} ((\tau \circ \sigma)(k) - \tau(\nu))((\tau \circ \sigma)(k) - \tau(\mu)) &= (\sigma(k) - \mu)(\sigma(k) - \nu) \\ &= (\sigma(k) - \nu)(\sigma(k) - \mu) \end{aligned}$$

بنابراین ماحصل اثر دادن  $\tau$  این است که  $\varepsilon(\sigma)$  در  $(-1)$  ضرب می شود:

$$\varepsilon(\tau \circ \sigma) - \varepsilon(\sigma) \quad , \quad \tau : \text{تبادل} \quad (۷)$$

توجه کنید که اگر  $\sigma$  همانی باشد،  $\varepsilon(\sigma) = 1$  زیرا به ازای  $i < j$ ،  $\sigma(j) - \sigma(i) = j - i > 0$ . بنابراین برای هر تبادل  $\tau$  داریم  $\varepsilon(\tau) = -1$ . حال اگر  $\sigma$  یک جایگشت دلخواه باشد، طبق قسمت اول قضیه،  $\sigma$  را به صورت ترکیبی از تبدل ها می نویسیم،  $\sigma = \tau_k \circ \dots \circ \tau_1$  با استفاده مکرر از (۷) داریم:

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^k \quad (۸)$$

که  $k$  تعداد تبدل ها است. چون به هر  $\sigma$  یک  $\varepsilon(\sigma)$  مشخص نسبت داده شده است، (۸) نشان می دهد تعداد تبدل های لازم برای نمایش  $\sigma$  باید همواره زوج یا همواره فرد باشد.  $\square$

به عنوان دستاوردی از قضیه بالا، اگر  $\sigma_1$  و  $\sigma_2$  دو جایگشت باشند، داریم:

$$\varepsilon(\sigma_1 \circ \sigma_2) = \varepsilon(\sigma_1) \cdot \varepsilon(\sigma_2) \quad (۹)$$

یک جایگشت را زوج (به ترتیب فرد) می نامیم در صورتی که  $\varepsilon(\sigma) = +1$  (به ترتیب  $\varepsilon(\sigma) = -1$ ). هر جایگشت زوج ترکیب تعدادی زوج تبادل است و هر جایگشت فرد ترکیب تعدادی فرد تبادل.

به کمک قضیه ۱۱-۴ اکنون می توانیم نسبت به تعمیم مفهوم دترمینان به ماتریس های  $n \times n$  اقدام کنیم.

(۱۱-۵) گزاره. فرض کنید به هر ماتریس  $n \times n$ ،  $A$ ، عددی  $D(A)$  نسبت داده ایم که واجد دو شرط

زیر است:

الف)  $D(A)$  نسبت به هر ستون خطی است اگر سایر ستون ها ثابت نگاه داشته شوند.

(ب)  $D(A)$  نسبت به ستون‌ها ضدمتقارن است، یعنی جابجایی دو ستون آن را در  $(-1)$  ضرب می‌کند.

در این صورت مقدار  $D(I_n)$ ،  $D$  را به طور منحصر به فرد مشخص می‌کند. برهان. ستون‌های ماتریس  $A = [a_{ij}]$  را به  $A^1, \dots, A^n$  نمایش می‌دهیم. اگر ستون  $j$ ام،  $A_j$  را به عنوان یک  $n$  تایی، یعنی عضوی از  $\mathbb{R}^n$  در نظر بگیریم، داریم:

$$A^j = a_{1j}e_1 + \dots + a_{nj}e_n$$

با توجه به (الف) داریم

$$D(A) = \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_n=1}^n a_{i_1,1} a_{i_2,2} \dots a_{i_n,n} D[e_{i_1} | e_{i_2} | \dots | e_{i_n}] \quad (10)$$

در ماتریس بالا چنانچه برای  $\mu \neq \nu$  داشته باشیم  $e_{i_\mu} = e_{i_\nu}$ ، مقدار  $D[e_{i_1} | \dots | e_{i_n}]$  صفر می‌شود زیرا که جابجایی  $e_{i_\mu}$  و  $e_{i_\nu}$  از یک طرف ماتریس سمت راست بالا را عوض نمی‌کند و از طرفی دیگر طبق (ب) مقدار  $D$  باید در  $(-1)$  ضرب شود. بنابراین  $D[e_{i_1} | \dots | e_{i_n}]$  صفر است مگر اینکه  $(i_1, i_2, \dots, i_n)$  جایگشتی  $\sigma$  از  $(1, 2, \dots, n)$  باشد. بنابراین می‌توان (10) را به صورت زیر نوشت:

$$D(A) = \sum_{\sigma: \text{جایگشت}} a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n} D[e_{\sigma(1)} | \dots | e_{\sigma(n)}]$$

ولی از خاصیت ضد تقارن (ب) می‌توانیم نتیجه بگیریم که:

$$\begin{aligned} D[e_{\sigma(1)} | \dots | e_{\sigma(n)}] &= \varepsilon(\sigma) D[e_1 | \dots | e_n] \\ &= \varepsilon(\sigma) D(I_n) \end{aligned}$$

پس

$$D(A) = \sum_{\sigma: \text{جایگشت}} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n} D(I_n) \quad (11)$$

□

و گزاره به اثبات می‌رسد.

همچنان که در بررسی سه ویژگی اصلی دترمینان  $2 \times 2$  و  $3 \times 3$  دیدیم، ویژگی‌های اول و دوم، که مشابه (الف) و (ب) هستند، ویژگی‌های ابتدایی مساحت و حجم متوازی‌الاضلاع و متوازی‌السطوح با منظور کردن علامت هستند ویژگی سوم، یعنی نسبت دادن عددی به مکعب واحد، به منزله ارائه واحد یا مقیاس برای مساحت یا حجم است.

توجه کنید که ستون‌های  $I_n$  در واقع بردارهای تعریف کننده مکعب واحد هستند. با تعیین  $D(I_n)$  مقدار  $D(A)$  برای هر ماتریس  $A$  مشخص می‌شود. چنانچه  $D(I_n)$  را برابر ۱ بگیریم تابع  $D$  حاصل، طبق تعریف،  $\det(A)$  (دترمینان  $A$ )، خوانده می‌شود، پس:

$$\det A = \sum_{\sigma: \text{جایگشت}} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n} \quad (12)$$

(۱۱-۶) نتیجه. تابع  $\det$  که به هر ماتریس  $n \times n$  مقدار (۱۲) را نسبت می‌دهد یگانه تابع از ماتریس‌های  $n \times n$  به  $\mathbb{R}$  است که سه ویژگی زیر را دارد: (الف) نسبت به هر ستون خطی است وقتی سایر ستون‌ها ثابت نگاه داشته شوند. (ب) نسبت به ستون‌ها ضدمتقارن است، و (ج)  $\det(I_n) = 1$ . □  
تعریف. برای  $A^1, \dots, A^n \in \mathbb{R}^n$ ، حجم  $n$ -بعدی متوازی‌السطوح  $P(A)$  برابر  $|\det A|$  است.

تعبیر زیر برحسب نگاشت‌های خطی نیز مورد استفاده قرار خواهد گرفت. ماتریس  $A$  که از کنار هم قراردادن  $n$  تایی‌های  $A^1, \dots, A^n$  به دست می‌آید در واقع نماینده یک نگاشت خطی  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  است که  $f(e_j) = A^j$ ، برای هر  $j = 1, \dots, n$ .  $\det f$  را همان  $\det A$  تعریف می‌کنیم. نگاشت خطی  $f$  مکعب واحد را به متوازی‌السطوح  $P(A)$  می‌نگارد. پس  $|\det f|$  در واقع حجم  $n$ -بعدی تصویر مکعب واحد تحت  $f$  است.

(۱۱-۸) گزاره. برای تابع‌های خطی  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  و  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  داریم:

$$\det(g \circ f) = (\det g)(\det f) \quad (13)$$

یا اگر ماتریس  $f$  را به  $A$  و ماتریس  $g$  را به  $B$  نمایش دهیم:

$$\det(BA) = (\det B)(\det A) \quad (۱۴)$$

برهان. برای اثبات،  $g$  (معادلاً  $B$ ) را تثبیت می‌کنیم و دو تابع زیر از مجموعه ماتریس‌های  $n \times n$  به  $\mathbb{R}$

را در نظر می‌گیریم:

$$D_1, D_2 : n \times n \text{ مجموعه ماتریس‌های } \rightarrow \mathbb{R}$$

$$D_1(A) = (\det B)(\det A)$$

$$D_2(A) = \det(BA)$$

اگر نشان دهیم  $D_1$  و  $D_2$  هر دو واجد شرط‌های (الف) و (ب) گزاره (۱۱-۵) هستند، از این گزاره

نتیجه می‌شود که مقدار  $D_1$  و  $D_2$  با دانستن مقدار آنها به ازای  $A = I_n$  تعیین می‌شود. ولی داریم:

$$D_1(I_n) = (\det B)(\det I_n) = \det B$$

$$D_2(I_n) = \det(BI_n) = \det B$$

پس اگر ثابت شود که شرط‌های (الف) و (ب) برای  $D_1$  و  $D_2$  برقرارند، خواهیم داشت

$D_1(A) = D_2(A)$  برای هر ماتریس  $A$  و حکم گزاره به اثبات می‌رسد. برای  $D_1(A)$  که مضرب ثابتی

از  $\det A$  است برقرار بودن (الف) و (ب) واضح است. موضوع را در مورد  $D_2$  تحقیق می‌کنیم. فرض

کنید  $A^j$ ، ستون  $j$ -ام  $A$ ، به صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a'_{1j} \\ \vdots \\ a'_{nj} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a''_{1j} \\ \vdots \\ a''_{nj} \end{bmatrix}$$

در این صورت ستون  $j$ -ام ماتریس  $BA$  می‌شود:

$$\begin{bmatrix} \sum_{\nu=1}^n b_{1\nu} a_{\nu j} \\ \vdots \\ \sum_{\nu=1}^n b_{n\nu} a_{\nu j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{\nu=1}^n b_{1\nu} a'_{\nu j} \\ \vdots \\ \sum_{\nu=1}^n b_{n\nu} a'_{\nu j} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum_{\nu=1}^n b_{1\nu} a''_{\nu j} \\ \vdots \\ \sum_{\nu=1}^n b_{n\nu} a''_{\nu j} \end{bmatrix}$$

چون ویژگی (الف) در مورد  $\det$  برقرار است داریم:

$$\det(BA) = \det(BA') + \det(BA'')$$

که در آن  $A'$  و  $A''$  ماتریس‌های هستند که از تفکیک ستون  $j$ -ام ماتریس  $A$  به دست آمده‌اند. پس

$$D_{\nu}(A) = D_{\nu}(A') + D_{\nu}(A'')$$

همین‌طور اگر ستون  $j$ -ام  $A$  در عدد  $r$  ضرب شود، ستون  $j$ -ام  $BA$  نیز در  $r$  ضرب خواهد شد و خطی بودن نسبت به ستون  $j$ -ام ثابت می‌شود. در مورد ویژگی (ب)، اگر  $A'$  ماتریس باشد که از تعویض ستون‌های  $i$  و  $j$  ماتریس  $A$  به دست آید،  $BA'$  نیز از تعویض ستون‌های  $i$  و  $j$  ماتریس  $BA$  حاصل می‌شود زیرا که به طور کلی در حاصل ضرب دو ماتریس  $MN$ ، ستون  $j$  ام از ضرب کردن ردیف‌های  $M$  در ستون  $j$ -ام  $N$  به دست می‌آید. پس چون  $\det$  واجد شرط (ب) است و این شرط برای  $D_{\nu}$  نیز نتیجه می‌شود و گزاره به اثبات می‌رسد.  $\square$

گزاره بالا نتایج مهمی در پی دارد از جمله:

(۱۱-۹) نتیجه. شرطی لازم و کافی برای وارون‌پذیری تابع خطی  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  این است که  $\det f \neq 0$ . مشابهاً شرطی لازم و کافی برای وارون‌پذیری ماتریس  $n \times n$ ،  $A$ ، این است که  $\det A \neq 0$ .

برهان. اگر  $A$  وارون‌پذیر باشد، ماتریسی  $A^{-1}$  وجود دارد که  $AA^{-1} = I$ ، پس طبق (۱-۸)،  $(\det A)(\det A^{-1}) = 1$ ، در نتیجه  $\det A \neq 0$ . بالعکس اگر  $A$  (یا معادلاً تابع خطی متناظر،  $f$ ) وارون‌پذیر نباشد، می‌دانیم ستون‌های  $A$  وابسته خطی خواهند شد، پس می‌توان یک ستون را به صورت ترکیب خطی ستون‌های دیگر نوشت. پس با استفاده از بسط دادن به کمک ویژگی (الف)، به مجموع  $(n-1)$  دترمینان ماتریس‌هایی می‌رسیم که یک ستون آنها تکرار شده است. دترمینان ماتریسی که دو ستون برابر داشته باشد صفر است زیرا که با تعویض دو ستون از یک سو ماتریس عوض نمی‌شود و از سویی طبق (ب) مقدار دترمینان باید در  $(-1)$  ضرب شود.  $\square$

یک دستاورد برهان بالا را جداگانه ثبت می‌کنیم:

(۱۱-۱۰) نتیجه. مجموعه  $\{A^1, \dots, A^n\}$  از عناصر  $\mathbb{R}^n$  مستقل خطی است اگر و تنها اگر



□  $\det A \neq 0$ .

اکنون می‌توانیم مفهوم "راستگرد" و "چپگرد" را در  $\mathbb{R}^n$  تعریف کنیم. فرض کنید  $\{A^1, \dots, A^n\}$  مستقل خطی است.  $n$  تایی مرتب  $(A^1, \dots, A^n)$  را راستگرد (به ترتیب چپگرد) می‌نامیم چنانچه  $\det A > 0$  (به ترتیب  $\det A < 0$ ). بدین ترتیب عیناً مانند حالت‌های دوبعدی و سه‌بعدی  $\det A$  حاوی دو اطلاع زیر است:

(i)  $|\det A|$  برابر حجم  $n$ -بعدی متوازی‌السطوح  $P(A)$  است.

(ii) علامت  $\det A$  نشان‌دهنده راستگردی یا چپگردی  $n$  تایی مرتب ستون‌های  $(A^1, \dots, A^n)$  است.

## خم‌های هموار در $\mathbb{R}^n$ (۱)

مقصود از یک خم یا منحنی (پارامتری، پرمایش شده) در  $\mathbb{R}^n$  تابعی  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  از یک بازه  $I \subset \mathbb{R}$  به  $\mathbb{R}^n$  است. بسیاری اوقات می‌توان  $I$  را یک بازه زمانی تلقی کرد که در این صورت  $\gamma(t)$  به مکان یک "ذره" در  $\mathbb{R}^n$ ، در زمان  $t$  تعبیر می‌شود. گاهی می‌نویسیم  $\vec{r} = \gamma(t)$  و  $\vec{r}$  را برداری مکان حرکت می‌نامیم. در نگاه اول ممکن است در نظر گرفتن یک "ذره" در  $\mathbb{R}^n$ ، برای  $n > 3$ ، مصنوعی به نظر رسد، ولی به مثال زیر توجه کنید. اگر ذره  $k$  مادی در  $\mathbb{R}^3$  تحت اثر جاذبه متقابل همدیگر حرکت کنند، می‌توان به صورتی که شرح خواهیم داد تحول دستگاه فیزیکی را حرکت یک ذره مجازی در فضای  $\mathbb{R}^{3k}$  تصور کرد. مکان هر ذره در  $\mathbb{R}^3$  با سه مؤلفه حقیقی مشخص می‌شود. حال اگر این ذرات اول تا  $k$ -ام این سه مؤلفه را کنار هم قرار دهیم یک  $3k$ -تایی به دست می‌آید که مکان هر  $k$  ذره را توصیف می‌کند. بدین ترتیب به جای  $k$  ذره در  $\mathbb{R}^3$  می‌توان یک ذره را در  $\mathbb{R}^{3k}$  در نظر گرفت. همچنان که در درس جلسه اول دیدیم این گونه هندسی‌سازی با ابعاد بالا می‌توان گاهی سودمند واقع شود.

برای خم  $\gamma$  می‌توان مفاهیم "پیوستگی" و "حد" را مطرح ساخت. اگر  $t_0$  در بازه تعریف قرار داشته باشد،  $\gamma$  را در  $t_0$  پیوسته می‌نامیم در صورتی که برای هر  $\varepsilon > 0$ ، وجود داشته باشد  $\delta > 0$  که هرگاه  $|t - t_0| < \delta$  و  $t$  در بازه تعریف  $\gamma$  باشد، داشته باشیم  $|\gamma(t) - \gamma(t_0)| < \varepsilon$ . این تعریف در ظاهر عیناً مانند تعریف پیوستگی تابع‌های  $I \rightarrow \mathbb{R}$  است، تنها تفاوت این است که عبارت  $|\gamma(t) - \gamma(t_0)|$  در واقع طول تفاضل دو بردار (دو  $n$ -تایی) است. بدین ترتیب پیوستگی گویای این خاصیت است که بتوان با نزدیک کردن  $t$  به  $t_0$ ، فاصله  $\gamma(t)$  از  $\gamma(t_0)$  از مقدار از پیش ملحوظ شده  $\varepsilon > 0$  کوچکتر کرد. برای دریافتن ارتباط دقیق این تعریف با تعریف مانوس پیوستگی تابع‌های  $I \rightarrow \mathbb{R}$ ،  $\gamma(t)$  را به صورت مؤلفه‌ای می‌نویسیم:

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$$

از آنجا که

$$|\gamma(t) - \gamma(t_0)| = \sqrt{(\gamma_1(t) - \gamma_1(t_0))^2 + \dots + (\gamma_n(t) - \gamma_n(t_0))^2}$$

نتیجه می‌شود که:

$$|\gamma_j(t) - \gamma_j(t_0)| \leq |\gamma(t) - \gamma(t_0)| \leq \sqrt{n} \max_{i=1, \dots, n} |\gamma_i(t) - \gamma_i(t_0)| \quad (1)$$

که نامساوی طرف چپ برای هر  $j = 1, \dots, n$  برقرار است. طرف چپ نامساوی (1) نتیجه می‌دهد که هرگاه  $\gamma$  در  $t_0$  پیوسته باشد، هر  $\gamma_j$  نیز در  $t_0$  پیوسته است ( $\gamma_j : I \rightarrow \mathbb{R}$ ). بالعکس از نیمه راست (1) نتیجه می‌شود که اگر همه  $\gamma_i$  ها در  $t_0$  پیوسته باشند (به مفهوم پیوستگی هر یک از  $n$  تابع حقیقی  $\gamma_i$ )، آنگاه  $\gamma$  نیز در  $t_0$  پیوسته است. بین ترتیب می‌توان ادعا کرد که:

(۱۲-۱) شرط لازم و کافی برای پیوستگی  $\gamma$  در  $t_0$  این است که هر مؤلفه،  $\gamma_i$ ، در  $t_0$  پیوسته باشد.

به همین ترتیب می‌توان مفهوم "حد" را مطرح کرد. اگر  $t_0$  یک نقطه بازه  $I$  یا یک نقطه انتهایی آن باشد (در مورد باز، بسته، یا نیم باز بودن  $I$  فرضی نکرده‌ایم)، می‌نویسیم:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \gamma(t) = L = (L_1, \dots, L_n) \in \mathbb{R}^n$$

در صورتی که برای هر  $\varepsilon > 0$ ، وجود داشته باشد  $\delta > 0$  که هرگاه  $0 < |t - t_0| < \delta$  و  $t$  در بازه تعریف  $\gamma$  باشد، داشته باشیم  $|\gamma(t) - L| < \varepsilon$ . عیناً مانند حالت پیوستگی می‌توان ادعا کرد که:

(۱۲-۲) شرط لازم و کافی برای  $\lim_{t \rightarrow t_0} \gamma(t) = L$  این است که به ازای هر  $i = 1, \dots, n$  داشته باشیم

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \gamma_i(t) = L_i$$

■ اکنون می‌توانیم مفهوم مشتق‌پذیری  $\gamma$  را مطرح کنیم که این نیز کاملاً مشابه حالت  $\mathbb{R} \rightarrow I$  است.

$\gamma$  را در  $t_0$  مشتق‌پذیر می‌نامیم در صورتی که حد زیر وجود داشته باشد:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\gamma(t+h) - \gamma(t))$$

در صورت وجود، این حد را مشتق  $\gamma$  در  $t$ ، یا بردار سرعت  $\gamma$  در  $t$ ، می‌نامیم و به  $\gamma'(t)$  نمایش می‌دهیم.

طبق ۲-۳، شرطی لازم و کافی برای مشتق‌پذیری  $\gamma$  در  $t$  این است که هر یک از  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  در  $t$

مشتق‌پذیر باشند، در این صورت:

$$\gamma'(t) = (\gamma'_1(t), \dots, \gamma'_n(t))$$

تجسم مفهوم خم (پارامتری) و بردار سرعت به صورت مأنوس زیر است. معمولاً  $\gamma$  را با تصویر آن، یعنی مجموعه  $\{\gamma(t) \mid t \in I\}$  در  $\mathbb{R}^n$ ، که در تعبیر فیزیکی، مسیر حرکت است، نمایش می‌دهند. در این صورت  $\frac{1}{h}(\gamma(t+h) - \gamma(t))$  برداری همراستا با  $\gamma(t+h) - \gamma(t)$  می‌شود. وقتی  $h$  به صفر میل کند، راستای قاطع واصل بین  $\gamma(t)$  و  $\gamma(t+h)$  شهوداً به راستای "مماس" بر تصویر خم میل می‌کند. تعریف دقیقی از "مماس" در جلسات آینده ارائه خواهد شد. نسبت دادن کلمه "سرعت" به  $\gamma'(t)$  بدین سبب است که  $\frac{1}{h}(\gamma(t+h) - \gamma(t))$  "جابجایی متوسط" متحرک  $\gamma$  در بازه زمانی  $[0, h]$  است که در آن، هم فاصله مکانی  $\gamma(t+h)$  از  $\gamma(t)$  و هم جهت حرکت  $\gamma(t)$  منظور شده است. وقتی  $h \rightarrow 0$  این "جابجایی متوسط" به "جابجایی لحظه‌ای" متحرک در زمان  $t$  میل می‌کند (در صورت وجود حد).

### شکل ۱

لازم به تأکید است تصویر  $\gamma$  را نباید با "نمودار  $\gamma$ " اشتباه کرد. نمودار  $\gamma$  به صورت  $\{(t, \gamma(t)) \mid t \in I\}$  تعریف می‌شود و برای ترسیم آن باید از فضای  $\mathbb{R}^{n+1}$  استفاده کرد، در حالی که تصویر  $\gamma$  در  $\mathbb{R}^n$  ترسیم می‌شود. در مورد توابع  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  ما به ترسیم نمودار عادت کرده‌ایم و معمولاً توابع را از شکل نمودار آنها می‌شناسیم در حالی که تصویر یک تابع  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ، که یک زیرمجموعه  $\mathbb{R}$  است، معمولاً چندان گویای رفتار تابع  $f$  نیست. برای ابعاد بالاتر، رسم کردن نمودار یک بعد بیش از ترسیم تصویر می‌طلبد و کمتر مورد استفاده قرار می‌گیرد. اکنون به ذکر چند مثال می‌پردازیم.

مثال ۱.  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ،  $\gamma(t) = (t^2, t^3)$ . اگر نقاط  $\mathbb{R}^2$  را به  $(x, y)$  نمایش دهیم، تصویر  $\gamma$  از زوج‌های  $(x, y)$  تشکیل می‌شود که  $x = t^2$  و  $y = t^3$ . این مجموعه در شکل ۲ نمایش داده شده است.

### شکل ۲

پیکان روی خم جهت صعود  $t$  را نمایش می‌دهد. توجه کنید که  $\gamma$  مشتق‌پذیر است و در واقع:

$$\gamma'(t) = (2t, 3t^2)$$

“تیزی” این خم به ازای  $t = 0$  ممکن است در نظر اول متناقض با مشتق‌پذیری  $\gamma$  در  $t = 0$  بنماید، ولی در واقع تناقضی در میان نیست. در مورد نمودار، وجود “یک گوشه تیز” فقدان مشتق را می‌رساند ولی در مورد تصویر چنین نیست. اگر نمودار همین  $\gamma$  را در  $\mathbb{R}^3$  رسم کنیم، نمودار کاملاً “هموار” به نظر می‌رسد، در شکل ۳ کوشش شده است نمودار  $\gamma$ ، یعنی مجموعه  $\{(t, t^2, t^3) \mid t \in \mathbb{R}\}$  در فضای سه بعدی  $(t, x, y)$  نمایش داده شود. برای تجسم بهتر، تصویر قائم این نمودار بر سه صفحه  $(t, x)$ ،  $(t, y)$  و  $(x, y)$  در شکل ۴ نمایش داده شده‌اند.

شکل ۳

شکل ۴

**مثال ۲.**  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ،  $\gamma(t) = (t^2 - 1, t^3 - t)$  را در نظر می‌گیریم. مجموعه تصویر نمودار  $\gamma$  ظاهر می‌شود.  $\{(x, y) = (t^2 - 1, t^3 - t) \mid t \in \mathbb{R}\}$  در سمت راست شکل ۵ نمایش داده شده است. در سمت راست، نمودار  $\gamma$  ظاهر می‌شود.

شکل ۵

**مثال ۳.** خم فضایی  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  را به صورت  $\gamma(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$  تعریف می‌کنیم که در آن  $a$  و  $b$  اعداد حقیقی داده شده هستند. این خم مارپیچ دوار نام دارد. تصویر خم، یعنی مجموعه  $\{(x, y, z) = (a \cos t, a \sin t, bt) \mid t \in \mathbb{R}\}$  روی استوانه‌ای بنا شده بر دایره  $x^2 + y^2 = a^2$  در صفحه  $xy$  قرار دارد و با آهنگ ثابت  $b$  در امتداد محور  $z$  روی استوانه می‌پیچد (به شکل ۶).

شکل ۶

برای  $b > 0$ ،  $z$  نسبت به  $t$  صعودی و برای  $b < 0$ ، جهت  $z$  نزولی است.

خم  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  را هموار می‌نامیم اگر شرایط زیر فراهم باشند:

(۱) مشتق‌پذیر و  $\gamma'$  پیوسته باشد.

(۲)  $\gamma'(t) \neq \underline{0}$  برای هر  $t$  در  $I$ .

در مورد شرط دوم کمی توضیح لازم است. اگر به ازای  $t_0$  داشته باشیم  $\gamma'(t_0) = \underline{0}$ ، صفر شدن بردار سرعت به ازای  $t_0$  نشان می‌دهد که در لحظه  $t_0$  جهت حرکت مشخصی برای ذره وجود ندارد. بنابراین بدون این که پیوستگی  $\gamma'$  در  $t_0$  نقض شود، جهت حرکت برای  $t > t_0$  می‌تواند کاملاً متفاوت از جهت حرکت برای  $t < t_0$  شود و نوعی “تیزی” در مسیر حرکت پدید آید. مثال ۱، به ازای  $t = 0$ ، از این نوع بود. به عنوان مثال شاید تعجب‌آورتری، به مثال ۴ توجه کنید:

مثال ۴. خم  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\gamma(t) = \begin{cases} (t^2, t^2) & t \geq 0 \\ (-t^2, t^2) & t \leq 0 \end{cases}$$

می‌نویسیم  $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ .  $\gamma_1$  و  $\gamma_2$  هر دو مشتق‌پذیر با مشتق پیوسته‌اند.

شکل ۷

ولی تصویر  $\gamma$  که در شکل ۸ نمایش داده شده است به ازای  $t = 0$  که  $\gamma'(0) = \underline{0}$  تغییر جهت می‌دهد. همین پدیده برای تابع‌های  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}$  نیز موجود است لیکن به این دلیل که در این حالت به مجموعه تصویر توجه نمی‌شود و معمولاً “نمودار” رسم می‌شود، مورد توجه قرار نمی‌گیرد. مثلاً برای تابع  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ،  $f(t) = t^2$ ، نیمه بالایی محور قائم (شکل ۹) یک بار از بالا به پایین (برای  $t \leq 0$ ) و بار دیگر از پایین به بالا (برای  $t \geq 0$ ) طی می‌شود و به ازای  $t = 0$  یک تغییر جهت  $180^\circ$  صورت می‌گیرد. بدین ترتیب از این پس معمولاً شرط دوم هموار بودن ( $\gamma'(t) \neq \underline{0}$ ) برای اجتناب از مسیرهای حرکت ناهنجار فرض خواهد شد.

شکل ۹

شکل ۸

(۱۲-۳) بازپرمایش (تعویض پارامتر) یک مسیر هندسی در  $\mathbb{R}^n$  را ممکن است متحرک‌های گوناگون به شیوه‌های مختلف طی کنند. گذرا از یک “پرمایش” (روش پارامتری کردن) به پرمایش دیگر به مثابه در نظر گرفتن حرکت‌های مختلف روی یک مسیر است. یک خم هموار  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  در نظر

بگیرید (در نقاط انتهایی  $[a, b]$ ، مشتق یک طرفه منظور می‌شود). تابعی  $\alpha : [a', b'] \rightarrow [a, b]$  در نظر بگیرید که  $\alpha$  مشتق پذیر با مشتق پیوسته  $\alpha'$  باشد و  $\alpha'(\tau) > 0$  تناظری یک به یک میان نقاط  $\tau \in [a', b']$  و نقاط  $[a, b]$  به شکل  $\alpha(\tau) = t$  برقرار می‌کند. بدین ترتیب می‌توانیم از  $\tau$  برای مدرج کردن مسیر حرکت، یا تصویر  $\gamma$ ، استفاده کنیم. می‌نویسیم

$$\vec{r} = \gamma(t) = \gamma(\alpha(\tau)) = (\gamma \circ \alpha)(\tau)$$

و اگر  $\gamma \circ \alpha$  را به  $\tilde{\gamma}$  نمایش دهیم، می‌توانیم بنویسیم  $\tilde{\gamma}(\tau) = \vec{r}$ .  $\tilde{\gamma}$  را یک بازپیمایش جهت نگهدار  $\gamma$  می‌نامند. اگر قاعده زنجیری را مؤلفه به مؤلفه به کار گیریم خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}'(\tau) &= \left( \frac{d}{d\tau} \tilde{\gamma}_1(\tau), \dots, \frac{d}{d\tau} (\tilde{\gamma}_n(\tau)) \right) \\ &= \left( \gamma'_1(t) \frac{d}{d\tau}, \dots, \gamma'_n(t) \frac{d}{d\tau} \right), \quad \left( \frac{dt}{d\tau} = \alpha'(\tau) \right) \\ &= \alpha'(\tau) (\gamma'_1(t), \dots, \gamma'_n(t)) = \alpha'(\tau) \gamma'(t) \end{aligned}$$

پس

$$\tilde{\gamma}'(\tau) = \alpha'(\tau) \gamma'(t) \quad (2)$$

از آنجا که  $\alpha'(\tau) > 0$  فرض شده است،  $\tilde{\gamma}$  نیز هموار است و بردار سرعت  $\tilde{\gamma}$  همجهت با بردار سرعت  $\gamma$  می‌باشد. به همین ترتیب، هرگاه  $\alpha : [a', b'] \rightarrow [a, b]$  مشتق پذیر با مشتق پیوسته باشد و  $\alpha'(\tau) < 0$  برای هر  $\tau$  داریم  $\alpha(b') = a$  و  $\alpha(a') = b$  و  $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \alpha$  را یک بازپیمایش جهت برگردان  $\gamma$  می‌نامیم. در این حالت  $\alpha$  نزولی است، نقاط آغازی و پایانی حرکت تعویض می‌شوند، و بردار سرعت  $180^\circ$  تغییر جهت می‌دهد.

شکل ۱۰

(۱۲-۴) طول خم فرض کنید  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  مشتق پذیر با مشتق پیوسته باشد. با در نظر گرفتن تعبیر متداول  $\gamma'(t)$  به عنوان سرعت در زمان  $t$ ، می‌توان طول این بردار  $|\gamma'(t)|$  را تندی حرکت در زمان  $t$  تصور کرد. از آنجا که تندی حرکت معمولاً آهنگ پیمودن مسافت نیز تعبیر می‌شود، تعریف مناسبی

برای طول خم به صورت زیر به دست می آید. نقطه‌ای  $t$  در  $I$  را به عنوان مبدأ اندازه‌گیری طول تثبیت کنید، تابع طول خم  $l: I \rightarrow \mathbb{R}$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$s = l(t) = \int_{t_0}^t |\gamma'| \quad (3)$$

توجه کنید که چون  $\gamma'$  (و در نتیجه  $|\gamma'|$ ) پیوسته فرض شده است، این انتگرال وجود دارد و طبق قضیه بنیادی حساب دیفرانسیل و انتگرال داریم

$$\frac{ds}{dt} = |\gamma'(t)| \quad (4)$$

یعنی همان طور که مورد نظر بود، تندی مشتق طول خم پیموده شده نسبت به زمان است. ذکر این نکته ضروری است که تابع  $l$  می‌تواند مقدار منفی بگیرد. هرگاه  $t > t_0$ ،  $l(t) > 0$ ، و هرگاه  $t < t_0$ ،  $l(t) < 0$  منفی خواهد بود. به طور کلی،  $s = l(t)$ ، "طول جبری خم" از مبدأ حرکت  $\gamma(t_0)$  است بدین معنی که طول‌های طی شده در جهت صعود  $t$ ، مثبت، و طول‌های طی شده در جهت نزول  $t$ ، منفی محاسبه می‌شوند. تعریف انتگرال به صورت حد مجموع ریمان تعبیر دیگری از طول به دست می‌دهد. فرض کنید بازه  $[t_0, T]$ ،  $T > t_0$ ، را به صورت زیر افراز کنیم:

$$t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_p = T$$

آنگاه تقریبی برای مفهوم شهودی طول خم از  $\gamma(t_0)$  تا  $\gamma(T)$ ، طول خط شکسته‌ای است که از به هم وصل کردن متوالی نقاط  $\gamma(t_0)$ ،  $\gamma(t_1)$ ،  $\dots$ ،  $\gamma(t_p) = \gamma(T)$  به دست می‌آید:

$$l(T) \sim \sum_{i=1}^p |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})|$$

شکل ۱۱

حال

$$|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| = [(\gamma_1(t_i) - \gamma_1(t_{i-1}))^2 + \dots + (\gamma_n(t_i) - \gamma_n(t_{i-1}))^2]^{\frac{1}{2}}$$



با توجه به قضیه میانگین می توان نوشت  $\gamma_j(t_i) - \gamma_j(t_{i-1}) = (t_i - t_{i-1})\gamma'_j(t_{ij})$  که  $t_{ij}$  نقطه مناسبی در  $[t_{i-1}, t_i]$  است. پس

$$l(T) \sim \sum_{i=1}^p (t_i - t_{i-1}) \sqrt{\gamma'_1(t_{i1})^2 + \dots + \gamma'_n(t_{in})^2}$$

مقدار  $\sqrt{\quad}$  تقریبی برای تندی در طول خم بین  $\gamma(t_{i-1})$  و  $\gamma(t_i)$  است و می توان به طور دقیق نشان داد که حد مجموع بالا وقتی ضمانت افراز به صفر میل کند، برابر  $\int_{t_0}^t |\gamma'(t)| dt$  است.

مثال. انتگرالی بنویسید که طول خم زیر را که در مختصات قطبی داده شده به دست دهد:

$$r = 1 + 2 \cos \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

شکل ۱۲

توجه کنید که به ازای  $\theta = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ ، تصویر خم خود را در مبدأ مختصات قطع می کند. طول کامل خم (شامل دو طوقه) از (۳) به دست می آید. برای این کار، خم را به صورت پارامتری برحسب  $\theta$  توصیف می کنیم:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \gamma(\theta) = (x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta) \\ &= ((1 + 2 \cos \theta) \cos \theta, (1 + 2 \cos \theta) \sin \theta) \\ &= (\cos \theta + 1 + \cos 2\theta, \sin \theta + \sin 2\theta) \\ \gamma'(\theta) &= (-\sin \theta - 2 \sin 2\theta, \cos \theta + 2 \cos 2\theta) \\ |\gamma'(\theta)| &= \sqrt{5 + 4 \cos \theta} \end{aligned}$$

پس طول خم برابر است با:

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{5 + 4 \cos \theta} d\theta$$

حال فرض کنید  $\gamma$  یک خم هموار باشد. بازپرمایش جهت نگهدار  $\gamma$  برحسب طول به صورت زیر حاصل می شود. بازه ای  $[t_0, T]$  در نظر بگیرید و قرار دهید  $S = l(T)$ . پس  $l: [t_0, T] \rightarrow [0, S]$  یک

تابع مشتق پذیر با مشتق پیوسته است که  $l'(t) = |\gamma'(t)| > 0$  یعنی  $l$  صعودی است. پس وارون ترکیبی  $l, \alpha = l^{-1}$  وجود دارد و صعودی است و در واقع داریم  $\alpha'(s) = \frac{1}{l'(t)} = \frac{1}{|\gamma'(t)|} > 0$ . بازپرمایش  $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \alpha$  را "بازپرمایش جهت نگهدار  $\gamma$  بر حسب طول" می نامیم. به ویژگی مهم زیر توجه کنید

$$|\tilde{\gamma}'(s)| = |\gamma'(t) \cdot \alpha'(s)| = 1 \quad (5)$$

یعنی هرگاه خم بر حسب طول پرمایش شود، تندی برابر واحد است (واحد طول در واحد زمان طی می شود). در واقع عکس این مطلب نیز صحیح است، یعنی اگر  $|\gamma'(t)| \equiv 1$  می توان  $t$  را پارامتر طول تعبیر کرد زیرا که در این صورت

$$\int_{t_0}^t |\gamma'(u)| du = t - t_0.$$

یعنی طول خم از  $\gamma(t_0)$  تا  $\gamma(t)$  همان اندازه بازه زمانی از  $t_0$  تا  $t$  است.

#### (۱۲-۵) فرمول های مشتق گیری تابع های برداری

در (۲) مطلب زیر را با مشتق گیری مؤلفه به مؤلفه نشان دادیم:

(۱۲-۵-۱) هرگاه  $\alpha: J \rightarrow I$  یک تابع مشتق پذیر از بازه  $J$  به بازه  $I$  باشد و  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  تابعی مشتق پذیر، آنگاه:

$$(\gamma \circ \alpha)'(\tau) = \alpha'(\tau) \gamma'(\alpha(\tau)) \quad \text{زنجیره ای (قاعده)}$$

احکام زیر نیز مشابهاً از مشتق گیری مؤلفه به مؤلفه از فرمول های نظیر برای تابع های با مقدار حقیقی نتیجه می شوند. اثبات همه به عهده دانشجو واگذار می شود:

(۱۲-۵-۲) هرگاه  $\gamma, \lambda: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  مشتق پذیر باشند، تابع های  $\gamma + \lambda$  و  $\gamma \cdot \lambda$  نیز مشتق پذیرند و داریم:

$$(\gamma + \lambda)'(t) = \gamma'(t) + \lambda'(t) \quad (6)$$

$$(\gamma \cdot \lambda)'(t) = \gamma'(t) \cdot \lambda(t) + \gamma(t) \cdot \lambda'(t) \quad (7)$$

(۱۲-۵-۳) هرگاه  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  و  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  مشتق پذیر باشند، تابع  $f\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  که به

صورت  $(f\gamma)(t) = f(t)\gamma(t)$  تعریف می شود نیز مشتق پذیر است، و

$$(f\gamma)'(t) = f'(t)\gamma'(t) + f(t)\gamma'(t) \quad (۸)$$

(۱۲-۵-۴) هرگاه  $\gamma, \lambda : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  مشتق پذیر باشند، تابع  $\gamma \times \lambda : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  که به صورت

$(\gamma \times \lambda)(t) = \gamma(t) \times \lambda(t)$  تعریف می شود مشتق پذیر است و:

$$(\gamma \times \lambda)'(t) = \gamma'(t) \times \lambda(t) + \gamma(t) \times \lambda'(t) \quad (۹)$$

## خم‌های هموار در $\mathbb{R}^n$ (۲)

همه ما تصویری ذهنی از شدت یا ضعف "خمیدن" یا "انحنای" یک خم هندسی (تصویر یک خم پارامتری داریم. معمولاً تصور ما از انحنای، شدت انحراف یک خم از "خط راست بودن" است. مثلاً انحنای یک دایره با شعاع بزرگ را کوچکتر از انحنای یک دایره با شعاع کوچک می‌دانیم. موجوداتی که روی یک کره با شعاع بزرگ زندگی کنند دیرتر از موجوداتی که روی یک کره با شعاع کوچک زندگی کنند به کروی بودن زیستگاه خود پی می‌برند. معادلاً می‌توان گفت که پیمودن مسافتی روی دایره‌ای کوچک، در مقایسه با پیمودن همان مسافت روی دایره بزرگ، متحرک را از خط مماس در نقطه آغاز حرکت دورتر می‌کند (شکل ۱، الف و ب). بدین ترتیب انتظار داریم که تعریف ریاضی انحنای به گونه‌ای باشد که در شکل ۱، ج، انحنای در نقطه  $P$  بزرگتر از انحنای در نقطه  $Q$  باشد.

الف ب ج

شکل ۱

(۱۳-۱) خم‌های مسطح با این پیش درآمد، برای ارائه تعریف دقیق ریاضی از انحنای، به طریق زیر عمل می‌کنیم. نخست بحث ما محدود به خم‌های  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \gamma: I$  خواهد بود. نیم‌خطی را به عنوان یک جهت مرجع اختیار می‌کنیم، مثلاً نیم‌خط افقی به طرف راست. برای خم هموار  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ ، به ازای هر  $t \in I$ ،  $\gamma'(t) \neq 0$ ، بنابراین جهت مثبت خط مماس (نیم‌خط تعیین شده توسط جهت بردار سرعت) نیز مشخص است. حال زاویه  $\theta$  را به ازای هر  $t$ ، برابر زاویه از نیم‌خط مرجع به نیم‌خط مثبت مماس تعریف می‌کنیم (واحد اندازه زاویه را رادیان می‌گیریم). طبق صحبتی که شد، انحنای باید آهنگ تغییر  $\theta$  نسبت به مسافت طی شده روی خم باشد، یعنی

$$\kappa = \frac{d\theta}{ds} \quad (۱)$$

( $\kappa$ : حرف یونانی "کاپا"، معمولاً برای انحنای به کار گرفته می‌شود). تعریف دقیق  $\theta$  را باید (ضریب زاویه خط مماس)  $\arctan$  گرفت. دو شکل در اینجا ظاهر می‌شود:

### شکل ۲

(۱) ضریب زاویه مربوط به خط مماس است که با یک بار مشتق‌گیری از خم  $\gamma$  به دست می‌آید، بنابراین مشتق‌گیری مجدد،  $\frac{d\theta}{ds}$ ، مستلزم این است که خم اولیه دوبار مشتق‌پذیر باشد.  
 (۲) وقتی خط مماس در وضعیت قائم قرار گیرد، ضریب زاویه تعریف نشده است (یا  $\infty$  است) هر چند که به نظر می‌رسد  $\theta$  قابل تعریف شدن باشد.

در مورد (۱)، از این پس برای بحث در مورد انحنای فرض می‌کنیم که  $\gamma$  دوبار مشتق‌پذیر باشد. در مورد (۲)، اشکال تعریف  $\theta$  برطرف شدنی است و در تعریف معادلی که بعداً از انحنای ارائه خواهد شد، به آن اشاره خواهیم کرد. فعلاً با همین تعریف (۱)، وضعیت خط راست و دایره را بررسی می‌کنیم:  
 مثال ۱. برای خط راست در صفحه،  $\theta$ ، ثابت است، پس  $\frac{d\theta}{ds} = 0$ ، بین انحنای خط راست، همچنان که انتظار داریم، صفر است.

### شکل ۳

مثال ۲. دایره‌ای به شعاع  $R$  در نظر بگیرید که در جهت مثلثاتی پرمایش شده است (شکل ۴).

### شکل ۴

داریم

$$\theta = \frac{\pi}{2} + \alpha$$

$$\alpha = \frac{s}{R} \quad (\text{برحسب رادیان})$$

پس  $\kappa = \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{R}$ . بدین ترتیب همان گونه که انتظار می‌رفت، انحنای متناسب با معکوس شعاع دایره است.

در مثال بالا، اگر دایره در جهت عقربه‌ساعت پرمایش شود، خواهیم داشت  $\theta = \alpha - \frac{\pi}{2}$  و  $\alpha = -\frac{s}{R}$  (را همواره در جهت مثلثاتی مثبت، و  $s$  را در جهت مثبت فرض می‌کنیم)، پس

$\kappa = \frac{d\theta}{ds} = -\frac{1}{R}$ . بعضی کتاب‌ها از قدرمطلق  $\frac{d\theta}{ds}$  به عنوان انحنای صحبت می‌کنند، که در آن صورت علامت منفی ظاهر نمی‌شود، ولی این روش باعث از دست رفتن پاره‌ای اطلاعات مهم می‌شود. در تعریف ما، صعود  $\theta$  در جهت حرکت به منزله انحنای مثبت و نزول آن به معنای انحنای منفی است.

### شکل ۵

به زودی به مفهوم فیزیکی این علامت اشاره خواهیم کرد.

با تعریف (۱) می‌توان به محاسبه انحنای انواع خم‌ها اقدام کرد، ولی در اینجا ترجیح می‌دهیم تعریف معادلی از انحنای ارائه کنیم که قابلیت تعمیم به خم‌های واقع در ابعاد بالاتر را نیز دارد. خم هموار دوبار مشتق‌پذیر  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  را در نظر بگیرید. مماس واحد در جهت حرکت به‌ازای هر  $t \in I$  قابل تعریف کردن است:

$$\vec{T} = \frac{1}{|\gamma'(t)|} \gamma'(t) \quad (\gamma'(t) \neq 0 \text{ هموار بودن موجب می‌شود که } \gamma'(t) \neq 0) \quad (2)$$

ضمناً بنابر (۵) بخش قبل، داریم:

$$\vec{T} = \frac{d\vec{r}}{ds} \quad (3)$$

که  $s$  مقدار تابع طول در جهت حرکت است. چون  $\vec{T}$  یک بردار واحد است، می‌توان مؤلفه‌های افقی و قائم آن را به ترتیب به صورت کسینوس و سینوس زاویه  $\theta$  نوشت:

$$\vec{T} = (\cos \theta, \sin \theta) \quad (4)$$

اگر  $\gamma$  دوبار مشتق‌پذیر باشد، می‌توان ثابت کرد (ولی اثبات دقیق از حوصله این درس خارج است) که  $\theta$  را می‌توان در طول خم به صورت تابعی مشتق‌پذیر از  $t$  (یا  $s$ ) در نظر گرفت. نکته قابل توجه در مورد چنین تابع  $\theta$  این که معمولاً نمی‌توان برای یک خم پیچیده، مقدار  $\theta$  را به بازه خاصی به طول  $2\pi$  محدود کرد. به شکل ۶، الف، توجه کنید:

ب

الف

### شکل ۶

در نقطه  $A$  می‌توانیم  $\theta$  را برابر  $0$  یا هر مضرب دیگر  $2\pi$  انتخاب کنیم، ولی پس از این انتخاب، وقتی  $\theta$  به طور پیوسته در طول خم تغییر کند، مقدار آن در نقاط دیگر با انتخاب آن در  $A$  تحمیل می‌شود. مثلاً اگر  $\theta$  را در  $A$  برابر  $0$  بگیریم، مقدار  $\theta$  در  $B$  برابر  $\frac{\pi}{4}$ ، در  $C$  برابر  $\pi$ ، در  $D$  برابر  $\frac{3\pi}{4}$  و در  $E$  برابر  $2\pi$  خواهد شد. با این که توابع مثلثاتی سینوس و کسینوس برای  $0$  و  $2\pi$  یک مقدار دارند، ولیکن اگر  $\theta$  به طور پیوسته تغییر کند، مقدار  $\theta$  در  $A$  و در  $E$  برابر نخواهد بود، بلکه به اندازه  $2\pi$  افزایش خواهد داشت که یک گردش کامل مماس واحد حول دایره مثلثاتی را نشان می‌دهد. در شکل ۶ ب، مماس‌های واحد در طول خم را به مبدأ مختصات منتقل کرده‌ایم؛  $A', B', C', D'$  و  $E'$  منناظر با  $A, B, C, D$  و  $E$  هستند. وقتی متحرک در طول خم از  $A$  به  $E$  حرکت کند، مماس واحد روی دایره واحد یک دور کامل دایره مثلثاتی را در جهت مثبت می‌پیماید و بدین ترتیب از  $A$  تا  $E$  مقدار  $\theta$  به اندازه  $2\pi$  افزایش می‌یابد. به (۳) و (۴) باز می‌گردیم.  $\vec{T}$  همواره طول ثابت واحد را دارد بنابراین آهنگ تغییر آن نسبت به  $s$  باید صرفاً خمیدن  $\gamma$  را مشخص کند، یعنی با انحنا رابطه داشته باشد. در واقع:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{T}}{ds} &= \left(-\sin\theta \frac{d\theta}{ds}, \cos\theta \frac{d\theta}{ds}\right) \\ &= \kappa(-\sin\theta, \cos\theta)\end{aligned}$$

با توجه به این که  $\cos(\theta + \frac{\pi}{2}) = -\sin\theta$  و  $\sin(\theta + \frac{\pi}{2}) = \cos\theta$ ، بردار  $(-\sin\theta, \cos\theta)$  عمود بر  $\vec{T}$  و چرخش یافته نسبت به آن به اندازه  $\frac{\pi}{2}$  در جهت مثلثاتی است. این بردار را به  $\vec{N}$  نمایش می‌دهیم و قائم واحد  $\gamma$  می‌نامیم. توجه کنید که به ازای هر  $t$ ، دو قائم واحد قرینه برای  $\gamma$  وجود دارد که  $\vec{N}$  آن قائم است که از گردش  $\vec{T}$  به اندازه  $\frac{\pi}{2}$  در جهت مثلثاتی به دست می‌آید. پس داریم:

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \kappa\vec{N} \quad (5)$$

زوج  $(\vec{T}, \vec{N})$  و امتدادهای تعیین شده توسط آنها را به صورت یک دستگاه مختصات متحرک چسبیده به تصویر  $\gamma$  تجسم می‌کنیم  $(\vec{T}, \vec{N})$  معمولاً کنج متحرک  $\gamma$  خوانده می‌شود. (۵) را می‌توان این گونه تعبیر کرد که  $\kappa$  آهنگ تغییر این دستگاه مختصات متحرک وابسته به خم است. ضمناً اگر از

$$\vec{N} = (-\sin\theta, \cos\theta) \text{ نسبت به } s \text{ مشتق بگیریم، حاصل می‌شود:}$$

$$\frac{d\vec{N}}{ds} = -\kappa\vec{T} \quad (6)$$

قبلاً اشاره کردیم که  $\kappa = \frac{d\theta}{ds}$  متضمن دوبار مشتق‌گیری از  $\gamma$  است. از این رو رابطه  $\kappa$  را با بردار شتاب  $\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$  بررسی می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) \\ &= \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt} \frac{d\vec{r}}{ds}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\vec{T}\right) \\ &= \frac{d^2s}{dt^2}\vec{T} + \left(\frac{ds}{dt}\right)\left(\frac{ds}{dt} \cdot \frac{d\vec{T}}{ds}\right)\end{aligned}$$

پس

$$\vec{a} = \left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)\vec{T} + \kappa\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\vec{N} \quad (7)$$

فرمول (7) را می‌توان تجزیه بردار شتاب در راستای دستگاه مختصات متحرک وابسته به  $\gamma$  تعبیر کرد. توجه کنید که برای  $\kappa > 0$ ، مؤلفه  $\vec{a}$  در جهت  $\vec{N}$  مثبت و برای  $\kappa < 0$ ، مؤلفه  $\vec{a}$  در جهت  $\vec{N}$  منفی است. اگر مسیر حرکت را مسیر یک حرکت فیزیکی فرض کنیم،  $\vec{a}$  و نیرو همجهت هستند و  $\vec{a}$  باید همواره به سوی تقعر منحنی اشاره کند. این نکته با تعبیری که قبلاً از علامت  $\kappa$  ارائه کردیم سازگار است (شکل 7).

### شکل 7

حال سؤال اساسی زیر را مطرح می‌کنیم: انحنا تا چه حد معرف شکل هندسی (تصویر) یک خم است؟ قضیه زیر پاسخی قاطع به این سؤال می‌دهد. در واقع برای خم‌های هموار، کمیت انحنا شکل منحنی را به طور کامل تعیین می‌کند، یعنی دو منحنی که در نقاط متناظر انحناهای برابر داشته باشند با یک حرکت اقلیدسی در صفحه (انتقال + دوران) برهم قابل انطباقند.

(۱۳-۲) قضیهٔ اساسی خم‌ها فرض کنید  $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  دو خم هموار پرمایش شده برحسب طول باشند. انحناهای  $\alpha$  و  $\beta$  را به ترتیب به  $\kappa_1$  و  $\kappa_2$  نمایش می‌دهیم. اگر به ازای هر  $s \in I$ ، داشته باشیم  $\kappa_1(s) = \kappa_2(s)$ ، آنگاه می‌توان با یک حرکت اقلیدسی (انتقال + دوران) تصویر دو خم را برهم منطبق کرد.



اثبات یک نقطه مرجع  $s_0$  در  $I$  اختیار می‌کنیم. نخست انتقالی در صفحه انجام می‌دهیم که  $\alpha(s_0) = \beta(s_0)$  و  $\beta(s_0)$  را برهم منطبق کند. "انتقال" به معنی تابعی  $f(x, y) = (x, y) + (a, b)$  است که در آن برداری ثابت (بردار انتقال) است. بدین ترتیب اگر  $\alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s))$ ،  $f(\alpha(s)) = (\alpha_1(s) + a, \alpha_2(s) + b)$ ، و چون  $a$  و  $b$  ثابت هستند،  $\vec{T}$ ،  $\vec{N}$  و  $\kappa$  (که از مشتق‌گیری از  $\alpha$  نسبت به  $s$  به دست می‌آیند) تغییر نمی‌کنند. بدین ترتیب می‌توان از اول فرض کرد که  $\alpha(s_0) = \beta(s_0)$ . حال کنج‌های متحرک وابسته به  $\alpha$  و  $\beta$  را به ترتیب به  $(\vec{T}_1, \vec{N}_1)$  و  $(\vec{T}_2, \vec{N}_2)$  نمایش می‌دهیم. از آنجا که  $(\vec{T}_1, \vec{N}_1)$  و  $(\vec{T}_2, \vec{N}_2)$  هر دو راستگرد هستند، می‌توان با یک دوران به مرکز  $\alpha(s_0) = \beta(s_0)$  فرض کرد  $\vec{T}_2(s_0) = \vec{T}_1(s_0)$  و  $\vec{N}_2(s_0) = \vec{N}_1(s_0)$ . توجه کنید که دوران، زاویه  $\theta$  را به مقداری ثابت تغییر می‌دهد، پس تابع‌های انحنا تغییر نخواهد کرد. بدین ترتیب می‌توان از آغاز فرض کرد که  $\vec{T}_2(s_0) = \vec{T}_1(s_0)$  و  $\vec{N}_2(s_0) = \vec{N}_1(s_0)$ . حال تابع  $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\varphi(s) = \vec{T}_1(s) \cdot \vec{T}_2(s) + \vec{N}_1(s) \cdot \vec{N}_2(s)$$

مشتق‌گیری نسبت به  $s$  با استفاده از فرمول (۷) جلسه قبل و فرمول‌های (۵) و (۶) این جلسه نتیجه می‌دهد:

$$\varphi'(s) = \kappa_1(s) \vec{N}_1(s) \cdot \vec{T}_2(s) + \kappa_2(s) \vec{T}_1(s) \cdot \vec{N}_2(s) - \kappa_1(s) \vec{T}_1(s) \cdot \vec{N}_2(s) - \kappa_2(s) \vec{N}_1(s) \cdot \vec{T}_2(s)$$

از فرض قضیه،  $\kappa_1(s) = \kappa_2(s)$  داریم  $\varphi'(s) = 0$  برای هر  $s$ ، پس  $\varphi$  ثابت است. بنابراین:

$$\varphi(s) = \varphi(s_0) = \vec{T}_1(s_0) \cdot \vec{T}_2(s_0) + \vec{N}_1(s_0) \cdot \vec{N}_2(s_0)$$

برای هر  $s$

و چون به ازای  $s_0$ ، دو کنج برهم منطبقند، داریم  $\varphi(s) = 2$  به ازای هر  $s$ . ولی بردارهای  $\vec{T}_i$  و  $\vec{N}_i$  بردارهای واحدند، بنابراین  $\varphi(s)$  تنها در صورتی می‌تواند همواره برابر ۲ باشد که برای هر  $s$  داشته باشیم  $\vec{T}_1(s) = \vec{T}_2(s)$  و  $\vec{N}_1(s) = \vec{N}_2(s)$ . رابطه اول نتیجه می‌دهد که  $\frac{d}{ds}(\alpha(s) - \beta(s)) = 0$  پس  $\alpha(s) - \beta(s)$  ثابت است. ولی به ازای  $s = s_0$ ، با انتقال فرض کردیم  $\alpha(s_0) = \beta(s_0)$ ، پس  $\alpha(s) - \beta(s) = 0$  برای هر  $s$ ، یعنی با انتقال و دوران انجام شده، دو خم کاملاً برهم منطبق شده‌اند. ■

# تابع‌های چند متغیری

فرض کنید  $S$  زیرمجموعه‌ای از  $\mathbb{R}^n$  است. می‌خواهیم تابع‌های  $f: S \rightarrow \mathbb{R}^m$  را بررسی کنیم. بدین ترتیب  $f$  به هر  $n$  تایی  $x = (x_1, \dots, x_n)$  یک  $m$  تایی  $f(x) = y = (y_1, \dots, y_m)$  نسبت می‌دهد:

$$y = f(x) \quad (1)$$

هر  $y_i$  خود به  $x = (x_1, \dots, x_n)$  وابسته است و می‌توان  $f$  را متشکل از  $m$  تابع  $f_i: S \rightarrow \mathbb{R}$  دانست که  $y_i = f_i(x_1, \dots, x_n)$ :

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ y_m = f_m(x_1, \dots, x_n) \end{cases} \quad (2)$$

می‌نویسیم  $f = (f_1, \dots, f_m)$  و هر  $f_i$  را یک مؤلفه  $f$  می‌نامیم.

اگر  $S$  زیرمجموعه‌ای از  $\mathbb{R}$  باشد، یعنی  $n = 1$ ، و  $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ ، یعنی  $m = 1$ ، عادت داریم که از نمودار  $f$  یعنی زیرمجموعه  $\{(x, f(x)) \mid x \in S\}$  از  $\mathbb{R}^2$  برای تجسم تابع استفاده کنیم. بسیاری اوقات می‌توان با نگاه کردن به نمودار  $f$  خصوصیات رفتاری  $f$  را به سادگی دریافت. در مورد تابع‌های  $f: S \rightarrow \mathbb{R}^m$ ،  $S \subset \mathbb{R}^n$ ، به بررسی سه روش "نمودار"، "تصویر"، و "مجموعه تراز" برای تجسم هندسی رفتار تابع می‌پردازیم. هر یک از این روش‌ها در محدوده خاصی از ترکیب بعدها، یعنی  $m$  و  $n$ ، کارساز است.

(۱۵-۱) نمودار. برای تابع  $f: S \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $S \subset \mathbb{R}^n$ ، نمودار  $f$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\{(x, f(x)) \mid x \in S\} \quad (۳)$$

توجه کنید که  $x = (x_1, \dots, x_n)$  یک  $n$  تایی و  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$  یک  $m$  تایی است، بنابراین هر نقطه نمودار یک  $(n+m)$  تایی است یعنی نمودار یک زیرمجموعه  $\mathbb{R}^{n+m}$  است. این نکته اشکال استفاده از نمودار در ابعاد بالا را روشن می‌سازد. وقتی  $n+m$  از ۳ بزرگتر باشد نمی‌توان از نیروی باصره برای تجسم نمودار و مشاهده رفتار تابع یاری جست. استفاده ما از نمودار معمولاً محدود به حالت‌های  $m=n=1$  و  $m=2, n=1$  است. در حالت  $m=2, n=1$  نیز که مربوط به خم‌های پارامتری در صفحه می‌شود، روش بعدی ما (بررسی "تصویر") معمولاً مؤثرتر است. در زیر تعدادی مثال برای حالت  $m=2, n=1$  مطرح می‌کنیم.

مثال ۱. تابع  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  را به صورت  $f(x, y, z) = Ax + By + C$  در نظر می‌گیریم که در آن  $A, B$  و  $C$  اعداد حقیقی داده شده‌اند. اگر مقدار  $f(x, y)$  را به  $z$  نمایش دهیم، نمودار تابع عبارت است از مجموعه:

$$\{(x, y, z) \mid z = Ax + By + C\}$$

بدین ترتیب نقاط  $(x, y, z)$  روی نمودار دقیقاً نقاطی هستند که در رابطه  $Ax + By - z + C = 0$  صدق می‌کنند. این مجموعه یک صفحه در  $\mathbb{R}^3$  است که با محور  $z$  موازی نیست (بر صفحه  $xy$  عمود نیست).

مثال ۲. تابع  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  را به صورت  $f(x, y) = x^2 + y^2$  تعریف می‌کنیم. می‌نویسیم  $z = f(x, y)$ . نسبت به مختصات قطبی داریم  $z = r^2$ ، یعنی نقاط نمودار،  $(x, y, z)$ ، به این ترتیب به دست می‌آیند که اگر  $xy$  را صفحه افقی و محور  $z$  را عمود بر آن تصور کنیم، نقطه  $(x, y, z)$  که

بالاسر  $(x, y)$  قرار دارد، ارتفاعش از صفحه  $xy$  برابر مجذور فاصله  $(x, y)$  از  $z = 0$  است. بدین ترتیب نمودار  $f$  از دوران دادن یک سهمی حول محور  $z$  به دست می آید (شکل ۱).

مثال ۳. تابع  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  را در نظر می گیریم که با دستور  $f(x, y) = x^2$  تعریف شده است. بدین ترتیب نقاط روی نمودار سه تایی های به شکل  $(x, y, z) = (x, y, x^2)$  هستند. مقدار  $z$  فقط به مؤلفه اول، یعنی  $x$ ، وابسته است. شکل ۲ نمودار این تابع را نشان می دهد. توجه کنید که اگر سهمی  $z = x^2$  در صفحه  $xz$  را در امتداد محور  $y$  در  $\mathbb{R}^3$  حرکت دهیم نمودار  $f$  حاصل می شود.

مثال ۴. این بار تابع درجه دوی دیگری به شکل  $f(x, y) = x^2 - y^2$  در نظر می گیریم. نمودار از نقاط به صورت  $(x, y, z) = (x, y, x^2 - y^2)$  تشکیل شده است. بالا سر محور  $x$ ، یعنی برای  $y = 0$ ، سهمی  $z = x^2$  به عنوان بخشی از نمودار ظاهر می شود. بالا سر محور  $y$ ، یعنی وقتی  $x = 0$ ، سهمی وارونه  $z = -y^2$  به عنوان بخش دیگری از نمودار مشاهده می گردد. برای تجسم کامل نمودار می توان مثلاً به صورت زیر عمل کرد. به ازای هر  $y = c$  ثابت، بخشی از نمودار که بالاسر خط راست  $y = c$  قرار دارد در نظر می گیریم و با کنار هم چیدن این بخش ها شکل کامل نمودار را به دست می آوریم. بالاسر این خط داریم  $z = x^2 - c^2$  که یک سهمی است. رأس این سهمی در نقطه  $(0, c, -c^2)$  قرار دارد ولی شکل هندسی آن ثابت است. وقتی  $|c|$  بزرگ می شود این سهمی، با حفظ شکل رو به پایین حرکت می کند به طوری که رأس آن همواره روی سهمی  $z = -y^2$  تکیه دارد.

مثال های بالا نشان می دهد نمودار تابع های درجه دوم دو متغیری از تنوع بیشتری نسبت به تابع های درجه دوم یک متغیری برخوردار است.

(۱۵-۲) تصویر. در حالت  $m = n$  و همچنین در حالت  $n = 1, m > 1$ ، روش بررسی تصویر که در زیر می آید بسیاری اوقات روشی مؤثر برای درک عملکرد یک تابع است. به خصوص وقتی  $n = 2, 3$ ، این روش کمک بصری قابل توجهی است. در این روش دو نسخه از  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m$  در نظر

می‌گیریم. یکی به عنوان فضای مبدأ (دامنه) و دیگری به عنوان فضای مقصد (برد)، و آنگاه تصویر مجموعه‌های گوناگون در فضای مبدأ را تحت اثر  $f$  در فضای مقصد مطالعه می‌کنیم. چنانچه مجموعه‌های مناسبی در فضای مبدأ در نظر گرفته شوند (و این برای تابع‌های گوناگون متفاوت خواهد بود)، برداشت سودمندی از عملکرد تابع حاصل می‌شود.

مثال ۵. تابع  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x, y) = (x \cos y, x \sin y)$$

نقاط فضای مقصد (برد) را به  $(u, v)$  نمایش می‌دهیم، پس:

$$u = x \cos y, \quad v = x \sin y$$

هدف ما بررسی اثر هندسی  $f$  بر شکل مجموعه‌های مناسبی در صفحه  $xy$  است، یعنی برای مجموعه داده شده  $S$  در صفحه  $xy$ ، می‌خواهیم شکل  $f(S)$  که زیرمجموعه‌ای از صفحه  $uv$  است پیدا کنیم. کلید موفقیت این روش معمولاً انتخاب مناسب مجموعه در دامنه است. وقتی شکل خاصی به ذهن نرسد، معمولاً از ساده‌ترین اشکال شروع می‌کنیم. ساده‌ترین زیرمجموعه  $\mathbb{R}^2$  یک تک نقطه‌ای است ولی چون هر تک نقطه به یک تک نقطه نگاشته می‌شود، اطلاع چندانی از این بررسی حاصل نمی‌شود. پس از نقطه، شاید ساده‌ترین مجموعه‌ها خطوط راست باشند. در این مثال اثر  $f$  را بر خطوط راست قائم  $x = a$  و خطوط راست افقی  $y = b$  بررسی می‌کنیم. برای  $a$  داده شده تصویر خط راست  $x = a$  عبارت است از زوج‌های مرتب  $(u, v)$  که:

$$u = a \cos y, \quad v = a \sin y, \quad y \in \mathbb{R}$$

اگر  $a$  ثابت باشد و  $y$  در  $\mathbb{R}$  مقدار بگیرد، نقطه  $(u, v)$  دایره شعاع  $|a|$  را می‌پیماید. از آنجا که  $\cos y$  و  $\sin y$  هر یک دوره تناوب  $2\pi$  دارند، خط راست  $x = a$ ، تحت اثر  $f$ ، بی‌نهایت بار دایره شعاع  $|a|$  را

می‌پیماید. ضمناً برای  $\pm a$ ، دو خط  $x = a$  و  $x = -a$  هر دو بر این دایره شعاع  $|a|$  نگاشته می‌شوند. در حالت  $a = 0$ ، تمام خط  $x = 0$  (محور  $y$ ) به مبدأ مختصات در صفحه  $uv$  فرستاده می‌شود (شکل ۵). حال به بررسی اثر  $f$  روی خطوط افقی  $y = b$  می‌پردازیم. تصویر نقطه  $(x, b)$  نقطه  $(u, v)$  به صورت زیر است:

$$u = x \cos b, \quad v = x \sin b, \quad y \in \mathbb{R}$$

برای  $b$  ثابت، نقطه  $(u, v)$  روی خط راست  $(\sin b)u - (\cos b)v = 0$  در صفحه  $uv$  قرار دارد و با تغییر  $x$  کلیه نقاط روی این خط به دست می‌آیند. این یک خط راست گذرا از مبدأ صفحه  $uv$  با ضریب زاویه  $\tan b$  است (وقتی  $b$  به شکل  $k\pi + \frac{\pi}{4}$  باشد، محور  $v$  حاصل می‌شود) (شکل ۶).

حال تصویر مستطیل به صورت  $a_1 \leq x \leq a_2, b_1 \leq y \leq b_2$  را در تحت اثر  $f$  پیدا می‌کنیم. تصویر باید در حلقه بین دو دایره شعاع‌های  $|a_1|$  و  $|a_2|$  حول مبدأ صفحه  $uv$  قرار گیرد. از سویی دیگر تصویر باید محصور به دو خط راست گذرا از مبدأ با ضریب زاویه‌های  $\tan b_1$  و  $\tan b_2$  باشد، پس نوعاً تصویری مانند شکل ۷ به دست خواهد آمد.

به عنوان نمونه دیگر، تصویر شکل  $H$  مانند متشکل از دو خط راست  $x = \pm 1$  و پاره خط  $-1 \leq x \leq 1, y = 0$ ، عبارت است از دایره شعاع واحد حول  $u$  در صفحه  $uv$  به انضمام قطر  $-1 \leq u \leq 1, v = 0$ ، زیرا که هر دو خط راست  $x = \pm 1$  به یک دایره نگاشته می‌شوند.

(۱۵-۳) مجموعه تراز. در بررسی تابع‌های خطی و مستوی به مجموعه‌های تراز برخوردیم.

به طور کلی برای  $f: S \rightarrow \mathbb{R}^m$ ، به ازای هر  $c \in \mathbb{R}^m$ ، مجموعه تراز منسوب به  $c$  عبارت است از:

$$f^{-1}(c) = \{x \in S \mid f(x) = c\} \quad (۴)$$

وقتی  $f$  یک تابع خطی یا مستوی باشد. دیدیم که مجموعه‌های تراز ناتهی همه همبند و موازی هستند. در مورد تابع‌های غیرخطی، تنوع و افری می‌تواند حکمفرما باشد ولی خواهیم دید که رویهمرفته

بررسی نظام مجموعه‌های تراز راهگشای درک رفتار یک تابع است. در بحث آینده تابع‌های گوناگونی را از این دیدگاه مطالعه خواهیم کرد. لازم به ذکر است که بررسی مجموعه‌های تراز در بسیاری مسائل عملی نیز معمول است. مثلاً در نقشه‌های هواشناسی گاهی نقاط همدم (در یک ساعت معین روز) با رسم منحنی‌هایی که هر یک مشخص‌کننده یک دمای خاص است نمایش داده می‌شوند، در نقشه‌های جغرافیای طبیعی نقاط هم ارتفاع از سطح دریا روی یک منحنی نشان داده می‌شوند، و در نقشه پوشش ماهواره‌ها از سطح زمین، نقاطی که قدرت دریافت سیگنال ماهواره در آنها برابر است با یک منحنی به هم وصل می‌شوند. این بحث را با ذکر یک نکته کلی به پایان می‌بریم.

برای تابع  $f = (f_1, \dots, f_m), f : S \rightarrow \mathbb{R}^m$ ، برای  $c \in \mathbb{R}^m$  داده شده داریم  $c = (c_1, \dots, c_m)$  و:

$$\begin{aligned} f^{-1}(c) &= \{x \in S \mid f(x) = c\} \\ &= \{x \in S \mid f_1(x) = c_1, \dots, f_m(x) = c_m\} \\ &= \{x \in S \mid f_1(x) = c_1\} \cap \dots \cap \{x \in S \mid f_m(x) = c_m\} \end{aligned}$$

پس:

$$f^{-1}(c) = f_1^{-1}(c_1) \cap \dots \cap f_m^{-1}(c_m) \quad (5)$$

یعنی مجموعه تراز منسوب به  $c$  برابر اشتراک مجموعه‌های تراز تابع‌های  $f_1, \dots, f_m$ ، به ترتیب منسوب به  $c_1, \dots, c_m$  می‌باشد.

# مجموعه‌های تراز (۱)

به دنبال معرفی کلی مجموعه‌های تراز، اکنون مثال‌هایی مطرح می‌کنیم.

مثال ۱. فرض کنید  $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  یک نگاشت مستوی باشد.  $A$  را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$A(x) = L(x) + B \quad x \in \mathbb{R}^n \quad \text{برای هر} \quad (1)$$

که در آن  $L$  یک نگاشت خطی از  $\mathbb{R}^n$  به  $\mathbb{R}^m$  است و  $B$  یک عنصر ثابت  $\mathbb{R}^m$ . مجموعه‌های تراز  $A$  و  $L$  یکی هستند، در واقع

$$A^{-1}(c + B) = L^{-1}(c)$$

یعنی مجموعه تراز منسوب به  $c$  برای  $L$  همان مجموعه تراز منسوب به  $c + B$  برای  $A$  است. برای تابع خطی  $L$  می‌دانیم که مجموعه‌های تراز یا تهی هستند و یا زیرفضاهای خطی موازی و همبند هستند  $L$  می‌باشند.

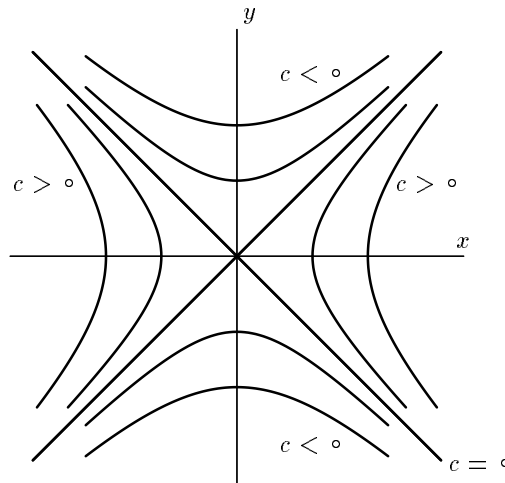
مثال ۲.  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  را به صورت  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  تعریف می‌کنیم. مجموعه‌های تراز  $f$  را برای مقادیر مختلف  $c \in \mathbb{R}$  بررسی می‌کنیم. برای  $c < 0$ ، مجموعه تراز منسوب تهی است؛ برای  $c = 0$ ، تک نقطه‌ای  $\{(0, 0, 0)\}$  حاصل می‌شود؛ و برای  $c > 0$ ، کره شعاع  $\sqrt{c}$ ، یعنی مجموعه نقاط  $(x, y, z)$  بقیه به شرط  $x^2 + y^2 + z^2 = c$  به دست می‌آید.



مثال ۳. تابع  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  را در نظر می‌گیریم که به صورت  $f(x, y) = x^2 - y^2$  تعریف شده است. نمودار این تابع را در مثال ۴ بخش قبل بررسی کردیم، اکنون به بررسی مجموعه‌های تراز می‌پردازیم. برای  $c = 0$ ، مجموعه

$$\{(x, y) \mid x^2 - y^2 = 0\} = \{(x, y) \mid x - y = 0 \text{ یا } x + y = 0\}$$

از دو خط راست  $x + y = 0$  و  $x - y = 0$  تشکیل شده است. برای  $c > 0$ ، هذلولوی دو شاخه از  $x^2 - y^2 = c$  به دست می‌آید که رئوس شاخه‌ها در نقاط  $(\pm\sqrt{c}, 0)$  قرار دارند و شاخه‌ها به طرف راست و چپ باز می‌شوند. برای  $c < 0$ ، نقش  $x$  و  $y$  تعویض می‌شود. این بار دو رأس هذلولوی در  $(0, \pm\sqrt{c})$  قرار دارند و هذلولوی به طرف بالا و پایین باز می‌شود (شکل ۱).



شکل ۱

ارتباط این شکل با نمودار  $z = x^2 - y^2$  به طریق زیر حاصل می‌شود. به ازای  $z = c$  با تقاطع صفحه  $z = c$  با نمودار متشکل از نقاط به شکل  $(x, y, c)$  است. اگر این مقطع را بر صفحه  $xy$  تصویر کنیم دقیقاً مجموعه تراز منسوب به  $c$  حاصل می‌شود.

مطلب فوق برای هر تابع  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  معتبر است. اگر نمودار تابع را با صفحه  $z = c$  قطع کنیم دقیقاً آن بخش نمودار به دست می‌آید که بالا سر مجموعه تراز منسوب به  $c$  قرار دارد. بدین ترتیب اگر

نمودار تابع در دست باشد با قطع کردن آن به وسیله صفحات  $z = c$  و تصویر کردن روی صفحه  $xy$ ، مجموعه‌های تراز  $f$  حاصل می‌شوند. بالعکس چنانچه مجموعه‌های تراز رسم شده باشند، با انتقال هر مجموعه تراز  $f^{-1}(c)$  به ارتفاع  $z = c$ ، نمودار تابع بازسازی می‌شود.

مثال ۴. فرض کنید  $a \in \mathbb{R}^n$  داده شده باشد که  $a \neq \underline{0}$ . تابع  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x) = a \cdot x \quad (۲)$$

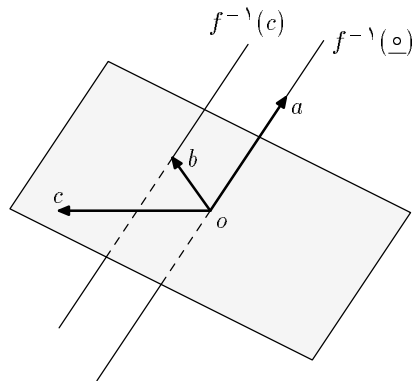
چون  $a \cdot x = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$ ، این در واقع یک تابع خطی است و در مثال ۱ می‌گنجد ولی بررسی مستقیم آن نیز قابل توجه است. می‌دانیم که مجموعه  $x$  هایی که در  $a \cdot x = c$  صدق می‌کنند یک ابرصفحه در  $\mathbb{R}^n$  است و این ابرصفحه‌ها همه موازی  $a \cdot x = 0$  (هسته  $f$ ) مجموعه  $x$  هایی که  $x \perp a$  می‌باشند.

مثال ۵. عضوی ثابت  $a \neq \underline{0}$  در  $\mathbb{R}^3$  در نظر می‌گیریم و  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x) = a \times x \quad (۳)$$

که مقصود از  $a \times x$  ضرب برداری  $a$  و  $x$  است. تابع (۳) نیز خطی است (هر مؤلفه عبارت درجه ۱ همگن نسبت به  $x_1, x_2, x_3$  است) و در چارچوب مثال ۱ قرار می‌گیرد. این مثال را نیز مستقیماً بررسی می‌کنیم. از آنجا که  $a \times x$  بر  $a$  عمود است، اگر  $c \in \mathbb{R}^3$  در صفحه گذرا از  $\underline{0}$  و عمود بر  $a$  قرار نداشته باشد، مجموعه تراز  $f^{-1}(c)$  تهی است. برای  $c = \underline{0}$ ، مجموعه  $x$  هایی که در  $a \times x = \underline{0}$  صدق می‌کنند مضارب بردار  $a$  هستند، یعنی نقاط روی خطی که از امتداد  $a$  پدید می‌آید. این در واقع هسته تابع خطی  $f$  است. پس سایر مجموعه‌های تراز ناتهی خطوط راست موازی  $a$  می‌باشند. در واقع

اشتراک  $f^{-1}(c)$  با صفحه عمود بر  $a$  باید یگانه بردار  $b$  در این صفحه باشد که  $(a, b, c)$  یک سه تایی راستگرد است و مساحت مستطیل تعیین شده توسط  $a$  و  $b$  برابر طول  $c$  می باشد.



شکل ۲

مثال ۶. تابع  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  را به صورت

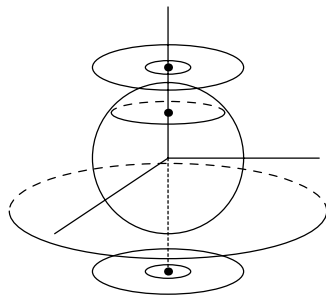
$$f(x, y, z) = (z, x^2 + y^2 + z^2)$$

تعریف می کنیم. به ازای  $c = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ ، مجموعه تراز  $f^{-1}(c)$  عبارت است از:

$$\{(x, y, z) \mid z = c_1\} \cap \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = c_2\}$$

برای  $c_2 < 0$ ، مجموعه سمت راست و در نتیجه  $f^{-1}(c)$  تهی است. برای  $c_2 = 0$ ، مجموعه سمت راست از تک نقطه ای  $\{(0, 0, 0)\}$  تشکیل شده است؛ پس  $f^{-1}(c_1, 0)$  تهی است مگر وقتی که  $c_1 = 0$  و  $f^{-1}(0, 0)$  نیز تک نقطه ای  $\{(0, 0, 0)\}$  است. حال فرض کنید  $c_2 > 0$ . مجموعه سمت راست، یعنی  $f^{-1}(c_2)$  کره شعاع  $\sqrt{c_2}$  به مرکز  $0$  است. برای این که مجموعه سمت چپ، یعنی  $f^{-1}(c_1)$  با  $f^{-1}(c_2)$  اشتراک ناتهی داشته باشد، شرط لازم و کافی این است که  $-\sqrt{c_2} \leq c_1 \leq \sqrt{c_2}$ . وقتی  $c_1 = \pm\sqrt{c_2}$ ، صفحه  $z = \pm\sqrt{c_2}$  بر کره مماس می شود و یک تک

نقطه‌ای به عنوان مجموعه تراز حاصل می‌شود  $(0, 0, \pm\sqrt{c_2})$  بسته به این که صفحه  $z = \sqrt{c_2}$  یا صفحه  $z = -\sqrt{c_2}$  در نظر گرفته شود. برای  $-\sqrt{c_2} < c_1 < \sqrt{c_2}$ ، دایره تقاطع کره با صفحه  $z = c_1$  است. بدین ترتیب مجموعه‌های تراز ناتهی تابع  $f$  عبارتند از تک نقطه‌ای‌های روی محور  $z$  و دایره‌های به مرکز روی محور  $z$  که در صفحات افقی  $z = c$  قرار دارند.



شکل ۳

در اینجا مسأله زیر را مطرح می‌کنیم. در مورد تابع‌های مستوی دیدیم که مجموعه‌های تراز شکل‌های ساده و یکنواختی دارند. به عنوان گام بعدی، آیا می‌توان حکمی کلی در مورد مجموعه‌های تراز یک تابع درجه ۲ عنوان کرد؟ تابع  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x_1, \dots, x_n) = a_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_n + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_ix_j \quad (4)$$

که در اینجا  $a_i$  ها و  $a_{ij}$  ها اعداد حقیقی داده شده‌اند. طرف راست (۴) کلی‌ترین عبارت درجه دوم برحسب  $x_1, \dots, x_n$  است. سؤال این است که مجموعه‌های تراز تابعی به شکل  $f$  در (۴) چگونه اشکالی هستند. در آینده خواهیم دید که با "دوران" مناسب در فضای  $\mathbb{R}^n$  می‌توان فقط صورت‌هایی از (۴) را در نظر گرفت که در آن جملات مخلوط درجه دوم، یعنی  $x_ix_j$  با  $i \neq j$ ، وجود نداشته باشند، یعنی کافی است تابع‌های درجه دوم به شکل زیر را در نظر بگیریم:

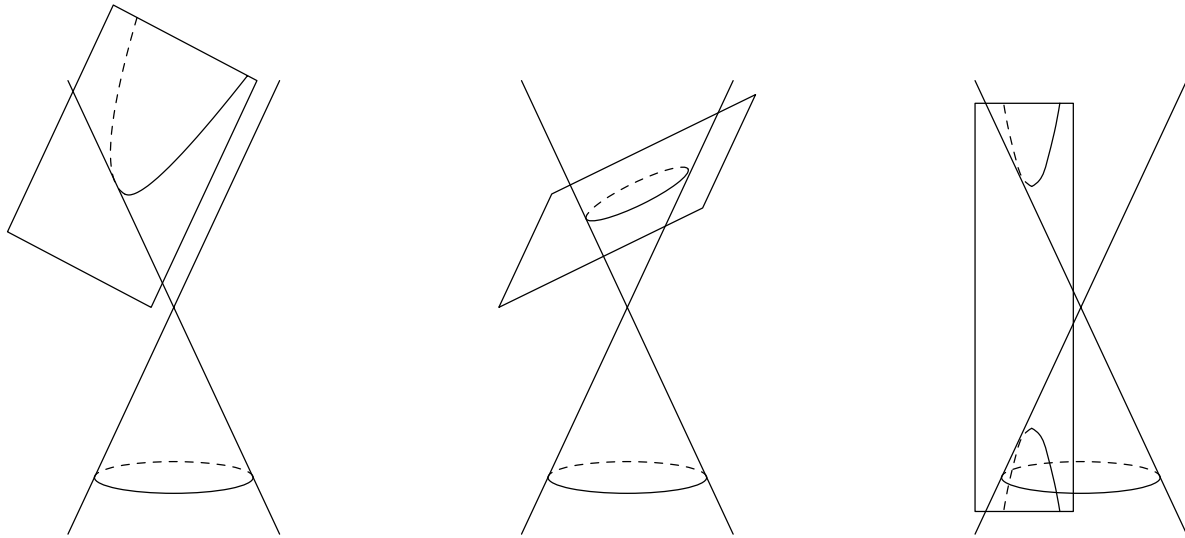
$$f(x_1, \dots, x_n) = a_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_n + a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 \quad (5)$$

در این بخش و بخش بعد دو حالت  $n = 2$  و  $n = 3$  را توصیف می‌کنیم.

در حالت  $n = 2$  اگر به جای  $x_1$  و  $x_2$  نمادهای معمولتر  $x$  و  $y$  را به کار گیریم، داریم

$$f(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_{11}x^2 + a_{22}y^2 \quad (6)$$

مجموعه‌های تراز چنین تابعی به مقاطع مخروطی معروفند به این دلیل که از نظر هندسی این منحنی‌ها را می‌توان به صورت مقطع یک صفحه و یک مخروط به دست آورد (شکل ۴). در واقع مقاطع مخروطی از دوران باستان شناخته شده بودند و کتاب مخروطات آپولونیوس که بیش از ۲۰۰ سال قبل از میلاد نوشته شده رسالهٔ جامعی در بررسی این اشکال است. سه شکل "سه‌می"، "بیضی" و "هذلولی" که در شکل نمایش داده شده‌اند، سه نوع عمدهٔ مقاطع مخروطی هستند.



شکل ۴

حال برای  $f$  در (۶) می‌خواهیم مجموعهٔ  $(x, y)$  هایی را که در  $f(x, y) = 0$  صدق می‌کنند بررسی کنیم. در (۶) می‌توانیم قرار دهیم  $a_0 = 0$  زیرا با جذب  $a_0$  در  $c$  مجموعه‌های تراز  $f(x, y) = c$  همهٔ حالات ممکن را در بر می‌گیرد. چند حالت در نظر می‌گیریم:

الف)  $a_{11} = a_{22} = 0$ . در این حالت در وضعیت تابع‌های مستوی قرار می‌گیریم که قبلاً بررسی شده‌اند.

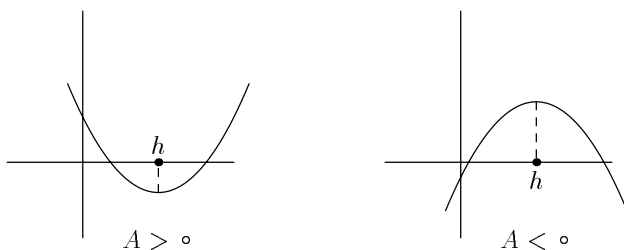
ب) یکی از  $a_{11}$  و  $a_{22}$  صفر و دیگری ناصفر. مثلاً فرض کنید  $a_{11} \neq 0$  و  $a_{22} = 0$ . در این صورت با تکمیل مجذور،  $f$  به شکل زیر در می آید:

$$f(x, y) = A_0 + a_{11}(x - h)^2 + a_{22}y \quad (7)$$

اگر  $a_{22} \neq 0$ ، با قرار دادن  $f(x, y) = 0$  و تقسیم بر  $a_{22}$ ، عبارتی به شکل:

$$y = A(x - h)^2 + B, \quad A = \frac{a_{11}}{a_{22}} \neq 0$$

به دست می آید. که سهمی نام دارد. بسته به این که  $A > 0$  یا  $A < 0$  یکی از دو منحنی نمایش داده شده در شکل ۵ حاصل می شود.



شکل ۵

به عنوان مقطع مخروطی، سهمی از تقاطع یک صفحه موازی یکی از خطوط مولد مخروط به دست می آید. اگر در (7) داشته باشیم  $a_{22} = 0$ ، آنگاه  $f(x, y) = 0$ ، بسته به علامت  $A_0$  و  $a_{11}$ ، دو خط راست قائم، یک خط راست یا تهی است.

حال فرض کنید  $a_{11}$  و  $a_{22}$  هر دو ناصفر باشند. در این صورت با تکمیل مجذورها در (6) به عبارت زیر می رسیم:

$$f(x, y) = a_{11}(x - h)^2 + a_{22}(y - k)^2 + A_0 \quad (8)$$

در اینجا دو حالت در نظر می گیریم:

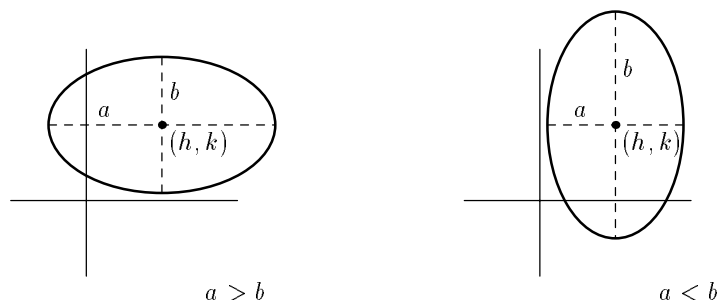
ج)  $a_{۲۲}$  و  $a_{۱۱}$  همعلامت باشند. در این صورت اگر  $A_0$  نیز همعلامت با  $a_{۱۱}$  و  $a_{۲۲}$  باشد،  $f(x, y)$  همواره مثبت یا همواره منفی است؛ یعنی در  $f(x, y) = 0$  هیچ نقطه‌ای صدق نمی‌کند. اگر  $A_0 = 0$ ، آنگاه تنها نقطه  $(h, k)$  در  $f(x, y) = 0$  صدق می‌کند. بالاخره اگر علامت  $A_0$  از علامت  $a_{۱۱}$  و  $a_{۲۲}$  متفاوت باشد، در  $f(x, y) = 0$ ،  $A_0$  را به طرف دیگر معادله برده بر  $-A_0$  تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{(x-h)^2}{-A_0/a_{۱۱}} + \frac{(y-k)^2}{-A_0/a_{۲۲}} = 1$$

از آنجا که علامت  $A_0$  با علامت  $a_{۱۱}$  و  $a_{۲۲}$  متفاوت بود، هر یک از دو مخرج بالا مثبت است و می‌توان هر یک را به صورت یک مجذور نوشت، پس داریم:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad (9)$$

این معادله یک بیضی به مرکز نقطه  $(h, k)$  است (شکل ۶).



شکل ۶

د)  $a_{۲۲}$  و  $a_{۱۱}$  مختلف‌العلامه باشند. در این صورت نیز اگر  $A_0 \neq 0$ ، با محاسبه‌ای عیناً مانند فوق

به یکی از دو عبارت زیر می‌رسیم (بسته به این که  $A_0$  با کدامیک از  $a_{۱۱}$  و  $a_{۲۲}$  همعلامت باشد):

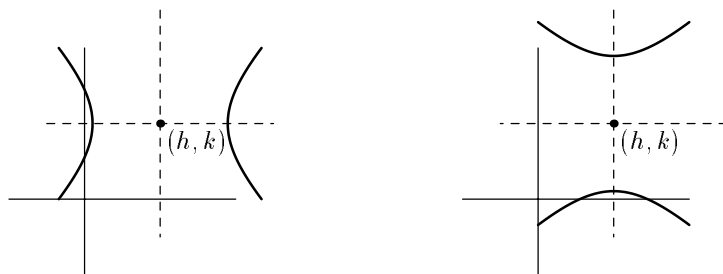
$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad (10)$$

یا

$$-\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad (11)$$

هر یک از این دو منحنی یک هذلولی نام دارد. هر هذلولی از دو شاخه قرینه تشکیل شده است (شکل

(۷)



شکل ۷

بالاخره در این حالت اگر  $A_0 = 0$ ، آنگاه  $f(x, y) = 0$  را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$a^2(x-h)^2 - b^2(y-k)^2 = 0 \quad (12)$$

که در آن  $a^2 = |a_{11}|$  و  $b^2 = |a_{22}|$ . این نمایش جبری دو خط راست متقاطع با ضریب زاویه‌های  $\pm \frac{a}{b}$  است که از نقطه  $(h, k)$  می‌گذرند. ضمناً هر یک از شاخه‌های هذلولی‌های (۱۰) و (۱۱) بر دو خط راست (۱۲) مجانبند.



## پیوستگی و حد (۱)

مفهوم‌های پیوستگی و حد در وضعیت چندمتغیری شباهت کامل به وضعیت یک متغیری دارند. همان انگیزه‌ها و همان روشها در اینجا نیز حکمفرماست. فرض کنید  $S$  زیرمجموعه‌ای از  $\mathbb{R}^n$  است و  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  یک تابع. نقاط  $S$  را به  $x = (x_1, \dots, x_n)$  و مقدار  $f(x)$  را به  $y$  نمایش می‌دهیم. در یک مسأله تجربی می‌توان  $x_1, \dots, x_n$  را عواملی دانست که با آزمایش اندازه‌گیری می‌شوند و  $f(x_1, \dots, x_n)$  یک عبارت یا فرمول است که از آن مقدار  $y$  محاسبه می‌شود. نقطه‌ای  $a = (a_1, \dots, a_n)$  در دامنه  $f$  در نظر بگیرید، یعنی  $a \in S$ . برای محاسبه مقدار  $f(a)$ ، خطایی  $e > 0$  را به عنوان "خطای قابل تحمل" منظور می‌کنیم. می‌خواهیم بدانیم که آیا می‌توان حدود خطایی  $e'_1 > 0, \dots, e'_n > 0$  برای به ترتیب  $x_1, \dots, x_n$  پیدا کرد به طوری که اگر برای  $x$  در دامنه  $f$ ،  $|x_1 - a_1| < e'_1, \dots, |x_n - a_n| < e'_n$ ، آنگاه خطای حاصل در محاسبه، یعنی  $|f(x) - f(a)|$  کوچکتر از  $e$  باشد؟ اگر بتوان برای هر  $e > 0$ ، مقادیر متناظری  $e'_1 > 0, \dots, e'_n > 0$  با ویژگی بالا پیدا کرد، می‌گوییم "محاسبه  $f$  در  $a$  پایدار است". اصطلاح معمول‌تر این است که تابع  $f$  را در نقطه  $a$  پیوسته بنامیم.

مثال ۱. (تابع‌های مستوی) تابع مستوی  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  را در نظر می‌گیریم:

$$f(x_1, \dots, x_n) = c_0 + c_1 x_1 + \dots + c_n x_n$$

که در آن  $c_0, c_1, \dots, c_n$  اعداد حقیقی داده شده‌اند. نشان می‌دهیم  $f$  در همه نقاط  $\mathbb{R}^n$  پیوسته است. نقطه‌ای  $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$  در نظر بگیرید و خطای دلخواهی  $e > 0$  منظور کنید. می‌خواهیم  $e'_1 > 0, \dots, e'_n > 0$  را طوری تعیین کنیم که:

$$(|x_1 - a_1| < e'_1, \dots, |x_n - a_n| < e'_n) \implies |f(x) - f(a)| < e$$

معمولاً یافتن  $e'_1, \dots, e'_n$  به این طریق حاصل می‌شود که سعی می‌کنیم عبارت  $|f(x) - f(a)|$  یا کمیتی بزرگتر از آن را، طوری بازنویسی کنیم که اثر هر یک از عوامل  $|x_1 - a_1|, \dots, |x_n - a_n|$  در آن ظاهر شود. در اینجا:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &= |(c_1 x_1 + \dots + c_n x_n) - (c_1 a_1 + \dots + c_n a_n)| \\ &= |c_1(x_1 - a_1) + \dots + c_n(x_n - a_n)| \\ &\leq |c_1||x_1 - a_1| + \dots + |c_n||x_n - a_n| \end{aligned}$$

حال اگر بتوانیم هر  $|c_j||x_j - a_j|$  را کوچکتر از  $\frac{e}{n}$  کنیم، نتیجه مطلوب در مورد خطای  $f(x)$  به دست می‌آید. چون  $c_j$  داده شده و معلوم است اگر  $e'_j$  برابر (یا کوچکتر از)  $\frac{e}{(|c_j|+1)n}$  اختیار شود مقصود حاصل می‌شود. تنها مشکل احتمالی این است که ممکن است  $c_j$  صفر باشد. برای احتراز از این مشکل  $e_j > 0$  را کوچکتر یا مساوی  $\frac{e}{(|c_j|+1)n}$  می‌گیریم. در این صورت:

$$\begin{aligned} (|x_1 - a_1| < e'_1, \dots, |x_n - a_n| < e'_n) \implies |f(x) - f(a)| &\leq |c_1||x_1 - a_1| + \dots + |c_n||x_n - a_n| \\ &< |c_1| \frac{e}{(|c_1|+1)n} + \dots + |c_n| \frac{e}{(|c_n|+1)n} \\ &< \frac{e}{n} + \dots + \frac{e}{n} = e \end{aligned}$$

و حکم به اثبات می‌رسد.

توجه کنید که تابع‌های مستوی شامل مثال‌های مهم زیر می‌شوند:

الف) تابع‌های ثابت. در اینجا  $c_1 = \dots = c_n = 0$ .

ب) تابع‌های افکنش. مقصود از "تابع افکنش روی مؤلفه  $j$ ام" تابع  $\pi_j: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  که به صورت

$$\pi_j(x_1, \dots, x_n) = x_j$$

در اینجا  $c_j = 1$  و سایر  $c_j$  ها صفر هستند.

ج) تابع جمع. تابع  $s: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  که به صورت زیر تعریف می‌شود تابع جمع می‌نامیم:

$$s(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \dots + x_n$$

در اینجا  $c_0 = 0$  و  $c_1 = \dots = c_n = 1$ .

مثال ۲. (تابع ضرب)  $p: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$p(x, y) = x \cdot y$$

ادعا می‌کنیم  $p$  در هر نقطه  $(a, b)$  از  $\mathbb{R}^2$  پیوسته است. برای خطای داده شده  $e > 0$ ، باید  $e'_1 > 0$  و  $e'_2 > 0$  را طوری تعیین کنیم که:

$$(|x - a| < e'_1, |y - b| < e'_2) \implies |xy - ab| < e$$

در اینجا نیز  $|xy - ab|$  را بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{aligned} |xy - ab| &= |xy - xb + xb - ab| \\ &\leq |x||y - b| + |b||x - a| \end{aligned}$$

مجدداً می‌خواهیم با کوچکتر کردن هر یک از دو عامل جمع در سمت راست از  $\frac{e}{2}$ ، به نتیجه مطلوب برسیم. تنها نکته جدید در اینجا این است که ضریب  $|x|$  در عبارت اول خود متغیر است. برای رفع این مشکل، چون قرار است  $x$  به  $a$  نزدیک باشد، مقدماً  $x$  را به بازه  $[a - 1, a + 1]$  محدود می‌کنیم، پس با این قید:

$$|x| < |a| + 1$$

و در نتیجه

$$|xy - ab| \leq (|a| + 1)|y - b| + |b||x - a|$$

حال با گرفتن  $0 < e' \leq \min\{1, \frac{e}{\sqrt{(|b|+1)}}\}$  و  $0 < e' \leq \frac{e}{\sqrt{(|a|+1)}}$ ، هم قید مقدماتی تأمین می‌شود و هم نامساوی مورد نظر در مورد  $|xy - ab|$  به دست می‌آید.

مثال ۳. (تابع خارج قسمت)  $U$  را مجموعه زیر از  $\mathbb{R}^2$  می‌گیریم:

$$U = \{(x, y) \mid y \neq 0\}$$

یعنی  $U$  مکمل محور  $x$  در صفحه  $xy$  است. تابع  $q: U \rightarrow \mathbb{R}$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$q(x, y) = \frac{x}{y}$$

ثابت می‌کنیم  $q$  در هر نقطه دامنه خود،  $(a, b)$ ،  $b \neq 0$ ، پیوسته است. برای  $e > 0$  داده شده،  $e' > 0$  و  $e' > 0$  جستجو می‌کنیم که

$$((x, y) \in U, |x - a| < e', |y - b| < e') \implies \left| \frac{x}{y} - \frac{a}{b} \right| < e$$

داریم

$$\begin{aligned} \left| \frac{x}{y} - \frac{a}{b} \right| &= \frac{|bx - ay|}{|y||b|} \\ &= \frac{|bx - ba + ba - ay|}{|y||b|} \\ &\leq \frac{|x - a|}{|y|} + \frac{|a||y - b|}{|y||b|} \end{aligned}$$

می‌خواهیم با انتخاب مناسب  $e' > 0$  و  $e' > 0$  هر یک از دو عامل طرف راست را از  $\frac{e}{2}$  کوچکتر کنیم. با این که  $y \neq 0$ ، از آنجا که فعلاً محدودیتی برای  $y \neq 0$  قائل نشده‌ایم، مخرج هر یک از دو عبارت می‌تواند به دلخواه کوچک شود و از این رو در نگاه اول محدود کردن اندازه کسرها مشکل به نظر می‌رسد. ولی توجه کنید که  $b \neq 0$  مقداری داده شده است و قرار است  $y$  نهایتاً نزدیک  $b$  اختیار شود. مقدمتاً  $y$  را از نصف فاصله  $b$  به  $0$  بزرگتر می‌گیریم، یعنی  $|y - b| < \frac{b}{2}$ ، یا  $|y| > \frac{|b|}{2}$ . این موجب می‌شود که  $\frac{1}{|y|} < \frac{2}{|b|}$ ، پس با این قید داریم:

$$\left| \frac{x}{y} - \frac{a}{b} \right| \leq \frac{2}{|b|} |x - a| + \frac{2|a|}{|b|^2} |y - b|$$

حال ضرایب  $|x - a|$  و  $|y - b|$  مقادیر ثابتی هستند.  $e'_1 > 0$  و  $e'_2 > 0$  را به طریق زیر اختیار می‌کنیم:

$$0 < e'_1 \leq \frac{|b|}{4}e, \quad 0 < e'_2 \leq \min\left\{\frac{|b|^2}{4(|a| + 1)}e, \frac{|b|}{2}\right\}$$

به این ترتیب اگر  $|x - a| < e'_1$  و  $|y - b| < e'_2$ ، هم قید مقدماتی رعایت می‌شود و هم  $|\frac{x}{y} - \frac{a}{b}| < e$  حاصل می‌گردد.

تا اینجا فقط تابع‌هایی را در نظر گرفته‌ایم که برد آنها  $\mathbb{R}$  است. حال تابعی  $f: S \rightarrow \mathbb{R}^m$  در نظر بگیریم که در آن  $S \subset \mathbb{R}^n$ . داریم  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$  که در اینجا هر یک از  $f_i$  ها تابعی از  $S$  به  $\mathbb{R}$  است. از آنجا که محاسبه تابع  $f$  به منزله محاسبه  $m$  تابع  $f_1, \dots, f_m$  است، طبیعی است که پیوستگی  $f$  در نقطه  $a$  را به صورت زیر تعریف کنیم:  $f$  را در نقطه  $a \in S$  پیوسته می‌نامیم در صورتی که هر یک از  $f_i$  ها در نقطه  $a$  پیوسته باشد. بدین ترتیب پیوستگی یک تابع با مقدار در  $\mathbb{R}^m$  نکته تازه‌ای ندارد، بلکه باید پیوستگی  $m$  تابع مؤلفه را بررسی کرد. با این حال می‌توان صورت معادلی از این تعریف ارائه کرد که شباهت ظاهری بیشتری به تعریف پیوستگی تابع‌های  $\mathbb{R} \rightarrow S$  دارد و تعبیر هندسی بعضاً سودمندی می‌پذیرد. برای این کار نخست نامساوی‌های ساده و اساسی زیر را مطرح می‌کنیم.

(۱۸-۱) فرض کنید  $z = (z_1, \dots, z_p)$  و  $w = (w_1, \dots, w_p)$  که در آن  $z_i$  ها و  $w_i$  ها اعداد حقیقی هستند. در این صورت

$$|z_i - w_i| \leq |z - w| \quad \text{برای هر } i = 1, \dots, p \quad (1)$$

$$|z - w| \leq \sqrt{p} \max\{|z_1 - w_1|, \dots, |z_p - w_p|\} \quad (2)$$

توجه کنید که  $|z - w|$  طول (نرم)  $p$  تایی  $z - w$  است و هر  $|z_i - w_i|$  قدرمطلق عدد  $z_i - w_i$  می‌باشد. نامساوی (۱) از تعریف  $|z - w|^2 = \sum_{j=1}^p |z_j - w_j|^2$  نتیجه می‌شود. برای (۲) نیز از همین تعریف

داریم:

$$|z - w|^2 \leq p \max\{|z_1 - w_1|^2, \dots, |z_p - w_p|^2\}$$

که با جذرگیری نتیجه مورد نظر را می دهد.

نامساوی (۱) نتیجه می دهد که اگر دو  $p$  تایی  $z$  و  $w$  در  $\mathbb{R}^p$  نزدیکتر از  $e$  باشند، تفاضل مؤلفه های متناظر آنها نیز کوچکتر از  $e$  است. بالعکس از (۲) می بینیم که هرگاه قدرمطلق تفاضل همه مؤلفه های متناظر  $z$  و  $w$  کوچکتر از  $e$  باشند، آنگاه فاصله  $z$  از  $w$  کوچکتر از  $\sqrt{p}e$  است. با توجه به این که در  $\mathbb{R}^p$  یک عدد ثابت است، این دو نامساوی نشان می دهند که برای نزدیک کردن  $z$  و  $w$  لازم و کافی است که همه مؤلفه های متناظر  $z$  و  $w$  به هم نزدیک شوند. با این مقدمه، تعریف پیوستگی تابع های  $f: S \rightarrow \mathbb{R}^m$  را به صورت زیر بازنویسی می کنیم:

(۱۸-۲) گزاره.  $S$  زیرمجموعه ای از  $\mathbb{R}^n$  است،  $a \in S$  و  $f: S \rightarrow \mathbb{R}^m$  یک تابع. در این صورت شرطی لازم و کافی برای پیوستگی  $f$  در  $a$  این است که برای هر  $e > 0$  وجود داشته باشد  $e' > 0$  که

$$(x \in S, |x - a| < e') \implies |f(x) - f(a)| < e$$

اثبات. نخست فرض می کنیم هر  $f_i$  در نقطه  $a$  پیوسته است و  $e > 0$  داده شده است. بنابراین فرض پیوستگی،  $e'_{i_1} > 0, \dots, e'_{i_m} > 0$  وجود دارند که:

$$(x \in S, |x_1 - a_1| < e'_{i_1}, \dots, |x_m - a_m| < e'_{i_m}) \implies |f_i(x) - f_i(a)| < \frac{e}{\sqrt{m}}$$

بنابراین تحت این شرایط از (۲) نتیجه می گیریم که:

$$|f(x) - f(a)| < e$$

از سویی دیگر اگر قرار دهیم  $e' = \min\{e'_{ij} \mid i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n\}$ ، هرگاه  $|x - a| < e'$ ، می‌توان طبق (۱) نتیجه گرفت که  $|x_j - a_j| < e'$  برای هر  $j$ ، و در نتیجه  $|x_j - a_j| < e'_{ij}$ ، بنابراین:

$$(x \in S, |x - a| < e') \implies |f(x) - f(a)| < e$$

بالعکس فرض کنید شرط بالا را بتوان به‌ازای هر  $\epsilon > 0$  تأمین کرد، نشان می‌دهیم هر  $f_i$  در نقطه  $a$  پیوسته است. فرض کنید  $\epsilon > 0$  داده شده باشد، می‌خواهیم  $\epsilon'_1 > 0, \dots, \epsilon'_n > 0$  را طوری اختیار کنیم که:

$$(x \in S, |x_1 - a_1| < \epsilon'_1, \dots, |x_n - a_n| < \epsilon'_n) \implies |f_i(x) - f_i(a)| < \epsilon$$

طبق فرض،  $\epsilon' > 0$  وجود دارد که  $|x - a| < \epsilon'$  و  $x \in S$  نتیجه می‌دهند  $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ ، و در نتیجه طبق (۱)،  $|f_i(x) - f_i(a)| < \epsilon$  برای هر  $i$ . حال تعریف می‌کنیم:

$$\epsilon'_1 = \dots = \epsilon'_n = \frac{\epsilon'}{\sqrt{n}}$$

بنابراین طبق (۲):

$$\begin{aligned} (x \in S, |x_1 - a_1| < \epsilon'_1, \dots, |x_n - a_n| < \epsilon'_n) &\implies (x \in S, |x - a| < \epsilon') \\ &\implies |f(x) - f(a)| < \epsilon \\ &\implies |f_i(x) - f_i(a)| < \epsilon \end{aligned}$$

□ و حکم به اثبات می‌رسد.

حکم گزاره ۱۸-۲ را می‌توان به صورت هندسی زیرتجسم کرد. مجموعه  $y$  های  $\mathbb{R}^m$  که در  $|y - f(a)| < \epsilon$  صدق می‌کنند دقیقاً نقاط گوی باز شعاع  $\epsilon$  حول  $f(a)$  هستند. همین طور مجموعه نقاط  $x \in S$  که در  $|x - a| < \epsilon'$  صدق می‌کنند، دقیقاً آن نقاط گوی باز شعاع  $\epsilon'$  حول  $a$  هستند که در مجموعه  $S$  قرار دارند. بنابراین پیوستگی در نقطه  $a$  بدین معنی است که به‌ازای هر گوی باز  $B$  به شعاع مثبت حول  $f(a)$ ، گوی بازی  $B'$  به شعاع مثبت حول  $a$  وجود دارد که  $f(B' \cap S) \subset B$  (شکل ۱). اگر

به تعریف اولیه مؤلفه‌ای پیوستگی در نقطه  $a$  بازگردیم، برای هر  $f_i$  و هر  $e_i$ ، باید  $e'_{i1} > 0, \dots, e'_{in} > 0$  وجود داشته باشند که  $|x_j - a_j| < e'_{ij}$ ،  $j = 1, \dots, n$ ، و  $x \in S$  نتیجه دهد  $|f_i(x) - f_i(a)| < e_i$ . قرار می‌دهیم  $e'_j = \min\{e'_{1j}, \dots, e'_{nj}\}$ ، پس

$$(x \in S, |x_1 - a_1| < e'_1, \dots, |x_n - a_n| < e'_n) \implies |f_i(x) - f_i(a)| < e_i, i = 1, \dots, m)$$

تجسم هندسی این مطلب این است که برای هر مستطیل باز  $R$  به مرکز  $f(a)$ ، مستطیل بازی  $R'$  به مرکز  $a$  وجود دارد که  $f(R' \cap S) \subset R$  (شکل ۲). استدلال بالا و استدلال گزاره ۱۸-۲ را می‌توان در این نکته خلاصه کرد که درون هر گوی باز به مرکز یک نقطه  $p$ ، مستطیل بازی به همان مرکز وجود دارد، و بالعکس درون هر مستطیل باز به مرکز  $p$ ، یک گوی باز به مرکز  $p$  وجود دارد.



## پیوستگی و حد (۲)

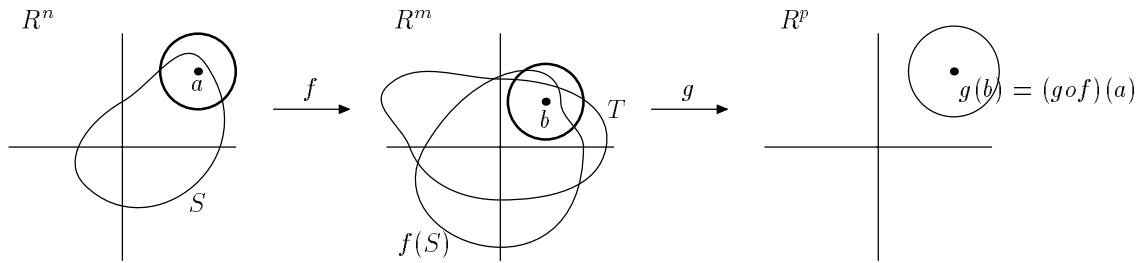
تابع  $f : S \rightarrow \mathbb{R}^m$  را پیوسته می‌نامیم در صورتی که  $f$  در همهٔ نقاط دامنه خود، یعنی  $S$ ، پیوسته باشد. مثال عمده‌ای که از تابع‌های پیوسته در جلسهٔ گذشته دیدیم تابع‌های مستوی  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  بودند. در واقع ثابت کردیم هر تابع مستوی  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  پیوسته است ولی از آنجا که شرط لازم و کافی برای پیوستگی یک تابع به  $\mathbb{R}^m$  پیوستگی همهٔ مؤلفه‌های  $f$  است و هر مؤلفهٔ تابع مستوی، مستوی است، حکم در مورد تابع‌های مستوی  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  نتیجه می‌شود. با مثال‌هایی که در مورد تابع‌های ضرب و خارج قسمت ثابت کردیم، اکنون می‌توان گردایهٔ بزرگی از تابع‌های پیوسته فراهم آورد. به این منظور نخست حکم کلی و مهم زیر را ثابت می‌کنیم:

(۱-۱۹) گزاره. فرض کنید  $f : S \rightarrow \mathbb{R}^m$ ،  $S \subset \mathbb{R}^n$  و  $g : T \rightarrow \mathbb{R}^p$ ،  $T \subset \mathbb{R}^m$ ، دو تابع باشند،  $a \in S$ ،  $b = f(a) \in T$  در  $f$  پیوسته باشد و  $g$  در  $b$  پیوسته باشد. در این صورت تابع  $g \circ f$  در نقطهٔ  $a$  پیوسته است.

اثبات. نخست دامنهٔ  $g \circ f$  را در نظر بگیرید:

$$(g \circ f) \text{ دامنه} = \{x \in S \mid f(x) \in T\}$$

که زیرمجموعه‌ای از  $S$  است. نقطه  $a$  در این دامنه است زیرا که فرض کرده‌ایم  $b = f(a)$  عضو  $T$  است. اثبات گزاره با توجه به گزاره ۱۸-۲ بخش قبل سراسر است. هرگاه گوی باز شعاع  $e > 0$



حول  $(g \circ f)(a)$  داده شده باشد، باید  $e' > 0$  پیدا کنیم که هرگاه  $x \in S$  و  $x$  در گوی باز شعاع  $e'$  حول  $a$  باشد، آنگاه  $(g \circ f)(x)$  در گوی باز شعاع  $e$  حول  $(g \circ f)(a)$  قرار گیرد. نخست از پیوستگی  $g$  در  $b$  استفاده می‌کنیم. طبق این فرض گوی شعاع  $e'' > 0$  حول  $b = f(a)$  وجود دارد که:

$$(y \in T, |y - b| < e'') \implies |g(y) - g(b)| < e \quad (1)$$

حال برای گوی شعاع  $e'' > 0$  حول  $b$ ، بنابر پیوستگی  $f$  در  $a$ ، گوی  $e' > 0$  حول  $a$  وجود دارد که:

$$(x \in S, |x - a| < e') \implies |f(x) - b| < e'' \quad (2)$$

بنابراین اگر  $x$  به علاوه در دامنه  $g \circ f$  باشد، اگر  $f(x)$  در (۲) را  $y$  بنامیم، حکم از (۱) نتیجه می‌شود. □  
با این گزاره و مثال‌های بخش قبل اکنون می‌توانیم پیوستگی "تابع‌های گویا" را بررسی کنیم.

نخست مقصود از یک تک جمله‌ای  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  تابعی به شکل زیر است:

$$f(x_1, \dots, x_n) = cx_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \quad (3)$$

که در اینجا  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  اعداد صحیح نامنفی هستند و  $c \in \mathbb{R}$ . به عنوان یک حالت ساده تابع  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  را در نظر بگیرید که به صورت  $f(x, y, z) = xyz$  تعریف شده است. نشان می‌دهیم

پیوسته است برای این کار؛  $f$  را به صورت ترکیب  $f = p \circ g$  می‌نویسیم که در آن:

$$g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad g(x, y, z) = (xy, z)$$

و

$$p: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad p(u, v) = uv$$

برای اثبات پیوستگی  $f$ ، کافی است بنا بر گزاره ۱۹-۱ ملاحظه کنیم که  $g$  و  $p$  پیوسته‌اند.  $p$  تابع حاصل ضرب است که در بخش گذشته پیوستگی آن ثابت شد. برای تابع  $g$ ، باید تحقیق کنیم که هر مؤلفه پیوسته است؛ مؤلفه دوم  $h$  تابع افکنش  $z \rightarrow (x, y, z)$  است که پیوسته می‌باشد. مؤلفه اول خود ترکیب افکنش و حاصل ضرب است:

$$(x, y, z) \rightarrow (x, y) \rightarrow xy$$

افکنش روی هر تعداد مؤلفه پیوسته است زیرا هر مؤلفه افکنش روی یک محور است. حال برای تک جمله‌ای کلی (۳) نیز با استفاده مکرر از این استدلال، یا استقراء، دیده می‌شود که (۳) یک تابع پیوسته از  $\mathbb{R}^n$  به  $\mathbb{R}$  تعریف می‌کند.

مجموع تعداد متناهی تک جمله‌ای، یک چندجمله‌ای می‌شود:

$$f(x_1, \dots, x_n) = c_1 x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} + \dots + c_k x_1^{\beta_1} \dots x_n^{\beta_n} \quad (4)$$

$f$  حاصل ترکیب تک جمله‌ای‌ها با تکرار عمل جمع است که هر دو نوع تابع پیوسته‌اند، پس  $f$  پیوسته است. به عنوان مثال برای دو جمله‌ای  $f(x_1, \dots, x_n) = c_1 x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} + c_2 x_1^{\beta_1} \dots x_n^{\beta_n}$ ،  $f$  را به صورت ترکیب زیر می‌نویسیم:

$$(x_1, \dots, x_n) \xrightarrow{g} (c_1 x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}, c_2 x_1^{\beta_1} \dots x_n^{\beta_n}) \xrightarrow{s} c_1 x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} + c_2 x_1^{\beta_1} \dots x_n^{\beta_n}$$

تابع جمع،  $s$ ، پیوسته است (مثال بخش قبل) و هر یک از دو مؤلفه تابع  $g$  تک جمله‌ای، پس پیوسته‌اند، بنابراین  $f = s \circ g$  پیوسته می‌باشد. حالت کلی با استقراء یا استفاده مکرر از تابع جمع حاصل می‌شود. بدین ترتیب چندجمله‌ای‌ها تابع‌های پیوسته تعریف می‌کنند.

یک گام فرای چندجمله‌ای‌ها، "تابع‌های گویا" هستند. اگر  $g(x)$  و  $h(x)$  دو چندجمله‌ای برحسب  $x = (x_1, \dots, x_n)$  باشند، تابع  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  را به صورت زیر تعریف می‌شویم: تابع گویا می‌نامیم:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{g(x_1, \dots, x_n)}{h(x_1, \dots, x_n)} \quad (5)$$

دامنه  $f$  از  $(x_1, \dots, x_n)$ ‌هایی در  $\mathbb{R}^n$  تشکیل شده که  $h(x_1, \dots, x_n) \neq 0$ . تابع  $f$  را می‌توان به صورت ترکیب دو تابع  $p$  و  $q$  به صورت زیر نوشت:

$$f = q \circ p, \quad x \xrightarrow{p} (g(x), h(x)) \xrightarrow{q} \frac{g(x)}{h(x)} \quad (6)$$

تابع  $p$  پیوسته است زیرا که هر مؤلفه آن یک چندجمله‌ای است، و تابع  $q$  نیز، که تابع خارج قسمت است، در بخش قبل نشان داده شده که در نقاطی که مؤلفه دوم صفر نباشد پیوسته است. بنابراین  $f$  پیوسته می‌باشد.

اکنون به بررسی مفهوم "حد" می‌پردازیم که قرابت‌هایی با مفهوم پیوستگی دارد. اگر  $\rho > 0$  داده شده باشد، مقصود از گوی باز محذوف به شعاع  $\rho$  و مرکز  $a \in \mathbb{R}^n$ ، مجموعه زیر است:

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 < |x - a| < \rho\}$$

به بیان دیگر، با حذف مرکز از گوی باز شعاع  $\rho$ ، گوی محذوف شعاع  $\rho$  به مرکز  $a$  به دست می‌آید. حال زیرمجموعه  $S$  از  $\mathbb{R}^n$  را در نظر بگیرید. نقطه  $a \in \mathbb{R}^n$  را یک نقطه حدی  $S$  می‌نامیم در صورتی هر گوی محذوف شعاع مثبت به مرکز  $a$  حاوی نقطه‌ای از  $S$  باشد. توجه کنید که این تعریف شرطی بر

تعلق نقطه  $a$  به مجموعه  $S$  نمی‌گذارد؛  $a$  ممکن است نقطه‌ای از  $S$  باشد یا نباشد. در واقع می‌توان از تعریف نتیجه گرفت که در هر گوی محذوف به مرکز نقطه حدی، بی‌نهایت نقطه از مجموعه  $S$  وجود دارد. زیرا که هرگاه نقطه‌ای  $x$  از  $S$  در یک گوی محذوف به مرکز  $a$  باشد، داریم  $|x - a| > 0$  و حال طبق تعریف باید نقطه‌ای  $y$  از  $S$  در گوی محذوف شعاع  $|x - a|$  حول  $a$  باشد، یعنی  $|y - a| < |x - a|$ ، پس  $y \neq x$  و به همین ترتیب با کوچک کردن شعاع کره محذوف همواره نقطه جدیدی از  $S$  در گوی محذوف اولیه حول  $a$  پیدا می‌شود.

مثال ۱. برای مستطیل نیمه باز  $a < x < b$ ،  $c \leq y \leq d$  در  $\mathbb{R}^2$ ، که در آن  $a < b$  و  $c < d$ ، مجموعه نقاط حدی این مجموعه عبارت است از مستطیل بسته  $a \leq x \leq b$ ،  $c \leq y \leq d$ .

مثال ۲. برای حلقه  $0 < |x| < 1$  در  $\mathbb{R}^n$ ، یعنی مجموعه  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 < |x| < 1\}$ ، مجموعه نقاط حدی برابر است با گوی بسته  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1\}$ .

اکنون می‌توانیم مفهوم "حد" یک تابع را مطرح کنیم. فرض کنید  $S$  زیرمجموعه‌ای از  $\mathbb{R}^n$  باشد،  $a$  یک نقطه حدی  $S$ ،  $f : S \rightarrow \mathbb{R}^m$  یک تابع، و  $L \in \mathbb{R}^m$  می‌نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \quad (7)$$

و می‌خوانیم حد تابع  $f$  وقتی  $x$  به  $a$  میل کند برابر  $L$  است در صورتی که برای هر  $\epsilon > 0$ ، وجود داشته باشد  $\delta > 0$  که:

$$(x \in S, 0 < |x - a| < \delta) \implies |f(x) - L| < \epsilon \quad (8)$$

به بیان دیگر، برای هر گوی با شعاع مثبت  $\epsilon$  حول  $L$ ، گوی محذوفی به شعاع مثبت  $\delta$  حول  $a$  وجود داشته باشد که اشتراک آن با  $S$  به تمامی به داخل گوی شعاع  $\epsilon$  حول  $L$  نگاهشته شود.

این تعریف با تعریف پیوستگی  $f$  در نقطه  $a$  در نکات زیر متمایز است:

(الف) نقطه  $a$  ممکن است یک نقطه دامنه تعریف  $f$  نباشد و بالعکس یک نقطه پیوستگی  $f$  ممکن است نقطه حدی نباشد، یعنی حد تابع وقتی  $x$  به  $a$  میل کند معنی نداشته باشد.

(ب) در تعریف حد، حتی اگر  $f$  در  $a$  تعریف شده باشد، شرطی بر مقدار  $f(a)$  قایل نشده ایم.

حکم زیر بلافاصله از تعریف نتیجه می شود:

(۱۹-۲) گزاره. برای تابع  $f: S \rightarrow \mathbb{R}^m$ ، اگر  $a$  در دامنه تعریف  $f$ ، یعنی  $S$ ، باشد، و نقطه حدی  $S$  نیز باشد، آنگاه شرطی لازم و کافی برای پیوستگی  $f$  در  $a$  این است که حد  $f$  وقتی  $x$  به  $a$  میل می کند وجود داشته و برابر  $f(a)$  باشد.  $\square$

توجه کنید که حد، در صورت وجود یگانه است. فرض کنید داشته باشیم:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L' \quad , \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

اگر  $L \neq L'$ ،  $|L - L'|$  اکیداً مثبت است. عدد  $\epsilon > 0$  را طوری می گیریم که  $\frac{1}{4}\epsilon < |L - L'|$ . در این صورت  $\epsilon' > 0$  و  $\epsilon'' > 0$  وجود دارند که:

$$(x \in S, 0 < |x - a| < \epsilon') \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

$$(x \in S, 0 < |x - a| < \epsilon'') \implies |f(x) - L'| < \epsilon$$

بدین ترتیب اگر  $\bar{\epsilon} = \min\{\epsilon', \epsilon''\}$ ، همه نقاط  $S$  که در گوی محذوف شعاع  $\bar{\epsilon}$  حول  $a$  قرار دارند هم به داخل گوی شعاع  $\epsilon$  حول  $L$  و هم به داخل گوی شعاع  $\epsilon$  حول  $L'$  نگاشته می شوند. این غیرممکن است زیرا  $L$  و  $L'$  از یکدیگر فاصله بیش از دو برابر  $\epsilon$  دارند.

مثال.  $S$  را زیرمجموعه  $\{(x, y) \mid (x, y) \neq (0, 0)\}$  از  $\mathbb{R}^2$  بگیرید. نقطه  $(0, 0)$  عضو این مجموعه نیست ولی نقطه حدی آن است. تابع  $f: S \rightarrow \mathbb{R}$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x, y) = \frac{x^m y^n}{x^2 + y^2}$$

که در آن  $m \geq 0$  و  $n \geq 0$  اعداد صحیح داده شده‌اند. می‌خواهیم  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$  را بررسی کنیم. در مختصات قطبی عبارت تابع به صورت زیر در می‌آید:

$$f(x, y) = r^{m+n-2} \cos^m \theta \sin^n \theta \quad , \quad (0, 0) \text{ از } (x, y) \text{ فاصله} = r \quad (9)$$

حالت اول. ( $m+n > 2$ ) بنویسید  $p = m+n-2$ .  $0 < p$ . داریم

$$|f(x, y)| \leq r^p$$

زیرا که  $|\cos \theta|$  و  $|\sin \theta|$  هر دو کوچکتر یا مساوی واحد هستند. حال اگر  $e > 0$  داده شده باشد، قرار می‌دهیم  $0 < e' \leq \sqrt[p]{e}$ . اگر  $(x, y)$  در گوی باز محذوف شعاع  $e'$  حول  $(0, 0)$  باشد، داریم:

$$|(x, y) - (0, 0)| < \sqrt[p]{e} \implies r^p < e$$

بنابراین  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$ .

حالت دوم. ( $m+n \leq 2$ ). در اینجا نیز می‌نویسیم  $p = m+n-2$  ولی  $p \leq 0$ . داریم:

$$f(x, y) = r^p \cos^m \theta \sin^n \theta$$

اگر  $p = 0$ ، داریم  $f(x, y) = \cos^m \theta \sin^n \theta$  و  $f$  روی هر نیم‌خط منتهی به  $(0, 0)$  مقداری ثابت دارد. بنابراین هرگاه  $(x, y)$  از روی یک نیم‌خط به  $(0, 0)$  میل کند مقدار (ثابت) تابع به  $\cos^m \theta \sin^n \theta$

میل خواهد کرد. با توجه به این که مقدار به  $\theta$  بستگی دارد و حد، در صورت وجود، یگانه است،

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$  وجود ندارد. برای  $p$  منفی، قرار می‌دهیم  $p = -q$  که  $q > 0$  و داریم:

$$|f(x,y)| = \frac{1}{r^q} |\cos^m \theta| |\sin^n \theta|$$

مثلاً برای  $\theta = \frac{\pi}{4}$ ،  $|f(x,y)| = \frac{2^{-\frac{m+n}{4}}}{r^q}$ . وقتی فاصله  $(x,y)$  به  $(0,0)$  به صفر میل کند،  $r^q$  به صفر

میل می‌کند و  $|f(x,y)|$  به طور نامحدود بزرگ می‌شود، یعنی به هیچ عدد  $L$  میل نمی‌کند.

شباهت‌های تعریف حد و پیوستگی نتایج مشابهی را ایجاب می‌کند. احکام زیر همه اثبات‌هایی

کاملاً مشابه احکام نظیر در مورد پیوستگی دارند و اثبات آنها به خواننده واگذار می‌شود.

(۳-۱۹)  $a \in S$ ،  $S \subset \mathbb{R}^n$  یک نقطهٔ حدی برای  $S$ ،  $f : S \rightarrow \mathbb{R}^m$ ،  $f = (f_1, \dots, f_m)$  و

$L = (L_1, \dots, L_m)$  عضو  $\mathbb{R}^m$  است. در این صورت  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  اگر و تنها اگر

$$\lim_{x \rightarrow a} f_i(x) = L_i \quad \text{برای } i = 1, \dots, m$$

(۴-۱۹)  $a \in S$ ،  $S \subset \mathbb{R}^n$  یک نقطهٔ حدی برای  $S$ ،  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ ،  $g : S \rightarrow \mathbb{R}$  و  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  و

$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L'$ . در این صورت تابع‌های  $f+g : S \rightarrow \mathbb{R}$  که به صورت  $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$

و  $f \cdot g : S \rightarrow \mathbb{R}$  که به صورت  $(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$  تعریف می‌شوند دارای حد هستند وقتی  $x$  به

$a$  میل کند و در واقع:

$$\lim_{x \rightarrow a} ((f+g)(x)) = L + L' \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} ((f \cdot g)(x)) = LL' \quad (11)$$

□



در مورد خارج قسمت در وضعیت بالا، تابع خارج قسمت را به صورت

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

تعریف می‌کنیم. دامنه  $\frac{f}{g}$  از آن نقاط  $x \in S$  تشکیل شده است که در آن  $g(x) \neq 0$ . فرض کنید  $L' \neq 0$ . اگر  $e$  را برابر مثلاً  $\frac{1}{4}|L'|$  در نظر بگیریم،  $e' > 0$  وجود دارد که:

$$(s \in S, |x - a| < e') \implies |g(x) - L'| < e = \frac{1}{4}|L'|$$

از این مطلب نتیجه می‌شود که برای  $x \in S$  که در گوی محذوف شعاع  $e'$  حول  $a$  باشند، لزوماً  $g(x) \neq 0$ . بنابراین دامنه  $\frac{f}{g}$  شامل اشتراک  $S$  با یک گوی محذوف حول  $a$  می‌شود و  $a$  یک نقطهٔ حدی برای دامنه  $\frac{f}{g}$  است. با این مقدمه، می‌توان مانند حالت پیوستگی ثابت کرد که:

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{L}{L'} \quad (۱۲)$$

## مشتق و تقریب خطی (۲)

در بخش گذشته مفهوم مشتق به عنوان آهنگ تغییر لحظه‌ای را تعمیم دادیم و به مفهوم مشتق سویی دست یافتیم. اکنون می‌خواهیم تعبیر دیگر مشتق، به عنوان خط مماس یا تقریب خطی، را برای تابع‌های  $f : S \rightarrow \mathbb{R}^m$  پیاده کنیم. طبیعی است که به جای "خط" باید شیء مسطح با بعد مناسب مطرح شود. در واقع کوشش می‌کنیم تعریف مماس در حالات یک متغیری را عیناً تعمیم دهیم.

فرض کنید  $f : S \rightarrow \mathbb{R}^m$  و  $g : T \rightarrow \mathbb{R}^m$  دو تابع باشند که به ترتیب روی دامنه‌های  $S$  و  $T$ ، زیر مجموعه‌هایی از  $\mathbb{R}^n$ ، تعریف شده‌اند، و  $a$  یک نقطه درونی هر دو مجموعه  $S$  و  $T$  است. در این صورت می‌گوییم  $f$  در نقطه  $a$  بر  $g$  مماس است در صورتی که:

$$f(a) = g(a) \quad (۱)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{|f(x) - g(x)|}{|x - a|} = 0 \quad (۲)$$

برای  $f : S \rightarrow \mathbb{R}^m$  داده شده،  $f$  را مشتق‌پذیر در نقطه  $a$  می‌نامیم در صورتی که تابعی مستوی  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  وجود داشته باشد که  $f$  در نقطه  $a$  بر  $A$  مماس باشد، یعنی:

$$f(a) = A(a) \quad (۳)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{|f(x) - A(x)|}{|x - a|} = 0 \quad (4)$$

در این صورت  $A$ ، تقریب خطی  $f$  در نقطه  $a$  خوانده می‌شود (اصطلاح "تقریب مستوی" دقیق‌تر است ولی "تقریب خطی" بسیار رایج‌تر). این تعریف را کمی می‌شکافیم. هر تابع مستوی  $A$  به شکل زیر است

$$A(x) = L(x) + B \quad (5)$$

که در آن  $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  یک تابع خطی است و  $B$  یک  $m$  تایی ثابت در  $\mathbb{R}^m$ . از (3) داریم:

$$B = f(a) - L(a) \quad (6)$$

پس  $A(x) = L(x) + f(a) - L(a)$ ، یا:

$$A(x) = f(a) + L(x - a) \quad (7)$$

زیرا که  $L$  خطی است. با جایگزینی در (4) داریم:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{|f(x) - [f(a) + L(x - a)]|}{|x - a|} = 0 \quad (8)$$

اگر  $x - a$  را به  $\vec{h}$  نمایش دهیم، (8) را می‌توان به صورت معادل زیر نیز نوشت:

$$\lim_{\vec{h} \rightarrow \underline{0}} \frac{|f(a + \vec{h}) - f(a) - L(\vec{h})|}{|\vec{h}|} = 0 \quad (9)$$

البته تابع خطی  $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  را معمولاً به صورت یک ماتریس  $m \times n$ ، مانند  $M$ ، می‌نویسیم.

بنابراین تقریب خطی،  $A$ ، شکل زیر را دارد:

$$|A(x)\rangle = M|x\rangle + |B\rangle \quad (10)$$

که شباهت آن با  $A(x) = mx + b$  واضح است. تابع خطی  $L$  (با معادلاً ماتریس  $m \times n$ ) را، در صورت مشتق‌پذیری  $f$  در  $a$ ، مشتق (یا دیفرانسیل)  $f$  در نقطه  $a$  می‌نامند و به  $Df(a)$  نمایش می‌دهند.

(۲۱-۱) محاسبه مشتق. اکنون نشان می‌دهیم که ماتریس مربوط به  $Df(a)$  را می‌توان به سادگی محاسبه کرد. اگر  $M$  ماتریس تابع خطی  $Df(a)$  باشد، می‌دانیم که ستون  $j$ -ام آن از مؤلفه‌های  $(Df(a))(e_j)$  تشکیل شده است. اگر در کسر (۹) به جای  $L$ ،  $Df(a)$  و به جای  $\vec{h}$ ،  $he_j$  را جایگزین کنیم (که  $h \in \mathbb{R}$ )، نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} \frac{f(a + he_j) - f(a) - (Df(a))(he_j)}{|he_j|} &= \frac{|f(a + he_j) - f(a) - h(Df(a))(e_j)|}{|h|} \\ &= \left| \frac{f(a + he_j) - f(a)}{h} - (Df(a))(e_j) \right| \end{aligned}$$

بنابراین اگر  $f$  در نقطه  $a$  مشتق‌پذیر باشد، داریم:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = (Df(a))(e_j) \quad (11)$$

بدین ترتیب اگر  $f$  در نقطه  $a$  مشتق‌پذیر باشد، ستون  $j$ -ام ماتریس  $Df(a)$ ، از مشتق‌های پاره‌ای مؤلفه‌های  $f$  تشکیل شده، پس  $Df(a)$  نمایش ماتریسی زیر را دارد:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{bmatrix} \quad (12)$$

گاهی اصطلاح ماتریس ژاکوبی نیز برای این ماتریس به کار می‌رود.

مثال ۱. برای تابع  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ،  $f(x, y) = x^2 - y^2$ ، با فرض مشتق‌پذیری  $f$  در نقطه  $(2, 1)$ ، معادله صفحه مماس بر نمودار را در نقطه  $(2, 1, 3)$  پیدا کنید. در اینجا  $Df(2, 1)$  به وسیله ماتریس  $1 \times 2$  زیر داده می‌شود

$$\left[ \frac{\partial f}{\partial x}(2, 1) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(2, 1) \right] = [4 \quad -2]$$

بنابراین طبق (۷):

$$A(x, y) = ۳ + ۴(x - ۲) - ۲(y - ۱)$$

که اگر بنویسیم  $z = A(x, y)$ ، معادلهٔ صفحهٔ مماس در فضای  $x, y, z$  عبارت است از:

$$۴x - ۲y - z - ۳ = ۰$$

مثال ۲. فرض کنید  $S$  زیرمجموعه‌ای از  $\mathbb{R}^n$ ،  $a = (a_1, \dots, a_n)$  یک نقطهٔ درونی  $S$  و  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  مشتق‌پذیر باشد. معادلهٔ ابرصفحهٔ مماس بر نمودار  $f$  را در نقطهٔ  $(a_1, \dots, a_n, f(a))$  محاسبه کنید. نقاط دامنه را به  $x = (x_1, \dots, x_n)$  و مقدار تابع را به  $x_{n+1} = f(x_1, \dots, x_n)$  نمایش می‌دهیم.  $Df(a)$  نمایش ماتریسی زیر را به عنوان یک ماتریس  $1 \times n$  دارد:

$$\left[ \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right]$$

بنابراین طبق (۷)، معادلهٔ ابرصفحهٔ مماس، یا عبارت تقریب خطی، عبارت است از:

$$x_{n+1} = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)(x_1 - a_1) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)(x_n - a_n) \quad (۱۳)$$

شبهات این عبارت به معادلهٔ خط مماس برای تابع‌های  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ، یعنی  $y = f(a) + f'(a)(x - a)$  مشهود است.

در اینجا می‌توانیم رابطهٔ مشتق‌پذیری، مشتق، و مشتق‌های سوپی را تشریح کنیم. فرض کنید  $f : S \rightarrow \mathbb{R}^m$  در نقطهٔ درونی  $a$  از  $S$  مشتق‌پذیر باشد. با محاسبه‌ای مشابه آنچه به یافتن درایه‌های ماتریس ژاکوبی منجر شد، رابطهٔ  $Df(a)$  و مشتق سوپی را به دست می‌آوریم. فرض کنید  $v$  یک عضو ناصفر  $\mathbb{R}^n$  باشد. اگر در کسر (۹)، به جای  $\vec{h}$  مقدار  $hv$  را جایگزین کنیم،  $h \in \mathbb{R}$ ، و به جای  $L$  بنویسیم

$Df(a)$ ، داریم:

$$\begin{aligned} \frac{|f(a+hv) - f(a) - Df(a)(hv)|}{|hv|} &= \frac{1}{|v|} \frac{|f(a+hv) - f(a) - h(Df(a))(v)|}{|h|} \\ &= \frac{1}{|v|} \left| \frac{f(a+hv) - f(a)}{h} - (Df(a))(v) \right| \end{aligned}$$

طبق فرض مشتق‌پذیری  $f$  در  $a$ ، عبارت بالا دارای حد صفر است، ولی حد عبارت اول داخل  $| \quad |$  در فوق همان مشتق نسبت به  $v$ ، یعنی  $D_v f(a)$ ، است. ضمناً برای  $v = \underline{0}$  نیز تساوی  $D_v f(a) = Df(a)(v)$  برقرار است زیرا دوطرف رابطه صفر هستند. بنابراین:

(۲۱-۲) گزاره. اگر  $f$  در  $a$  مشتق‌پذیر باشد برای هر  $v \in \mathbb{R}^n$  داریم

$$D_v f(a) = (Df(a))(v) \quad (14)$$

■

بالاخص این نتیجه مهم نشان می‌دهد که اگر تابع در  $a$  مشتق‌پذیر باشد، میان مشتق‌های جهت‌دار در جهت‌های گوناگون رابطه‌ای وجود دارد زیرا که همه آنها با دانستن مشتق‌های پاره‌ای (درایه‌های  $Df(a)$ ) و دانستن جهت، یعنی  $u$ ، قابل محاسبه‌اند. از نظر هندسی نیز باید همین را انتظار داشت زیرا که در صورت مشتق‌پذیری، خطوط مماس در جهات مختلف همه در یک شیء مسطح، یعنی نمودار تابع مستوی مماس باشد، قرار می‌گیرند. که همه خطوط مماس در یک زیرفضای مستوی قرار می‌گیرند برای تابعهایی که مشتق‌پذیر نباشند ممکن است برقرار نباشد. مثال زیر نمونه ساده‌ای از چنین وضعیتی است.

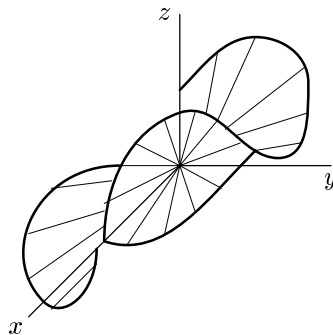
مثال. تابع  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

نشان می‌دهیم  $f$  در  $(0, 0)$  مشتق‌پذیر نیست. عبارت  $\frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$  در مختصات قطبی تبدیل می‌شود به  $r \cos^2 \theta \sin \theta$ . مقدار این عبارت در مبدأ مختصات، یعنی  $r = 0$ ، صفر است، پس به طور کلی

$$f(x, y) = r \cos^2 \theta \sin \theta$$

اگر دامنه  $f$  را به یک خط راست گذرا از مبدأ محدود کنیم، نمودار یک خط راست است زیرا که برای نیم‌خط تعریف شده توسط  $\theta$  ثابت داریم  $z = (\cos^2 \theta \sin \theta)r$ ، یعنی  $z$  تابعی خطی نسبت به  $r$  (فاصله از  $0$ ) است، و برای نیم‌خط مقابل (یعنی به‌ازای  $\theta + \pi$ )،  $\sin(\theta + \pi) = -\sin \theta$ ، پس در واقع  $z = (\cos^2 \theta \sin \theta)r$  یک خط راست بالا سر خط  $\{\theta, \theta + \pi\}$  تعریف می‌کند. به‌ازای  $\theta = 0, \pi$  و نیز به‌ازای  $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$  داریم  $f(x, y) = 0$ ، یعنی محورهای  $x$  و  $y$  جزء نمودار تابع  $f$  هستند. بنابراین اگر  $f$  در  $(0, 0)$  مشتق‌پذیر می‌بود، می‌بایست دو محور  $x$  و  $y$  جزء صفحه مماس باشند و در نتیجه صفحه مماس می‌بایست همان صفحه  $xy$  باشد. ولی به‌ازای مقادیر  $\theta$  غیر از مقادیر مربوط به دو محور، داریم  $(\cos^2 \theta)(\sin \theta) \neq 0$  و خط راست  $z = (\cos^2 \theta \sin \theta)r$  با صفحه  $xy$  در  $0$  برخورد غیر مماس دارد. این نکته نشان می‌دهد که تنها نامزد ممکن صفحه مماس برای نمودار  $f$  در  $(0, 0)$  در واقع بر همه نمودار مماس نیست، یعنی تابع در  $(0, 0)$  مشتق‌پذیر نیست (شکل ۱)!



شکل ۱

ضمناً توجه کنید که در  $(0, 0)$ ،  $f$  دارای مشتق سویی در همه جهتهاست زیرا با قرار دادن

داریم:  $u = (\cos \theta, \sin \theta)$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\underline{0} + hu) - f(\underline{0})}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \cos^2 \theta \sin \theta}{h^2} \\ &= \cos^2 \theta \sin \theta \end{aligned}$$

اکنون مشتق ناپذیری  $f$  در  $(0, 0)$  را به طور دقیق تر با توجه به تعاریف و نتایج به دست آمده توضیح می دهیم. فرض کنید  $f$  در  $(0, 0)$  مشتق پذیر باشد. در این صورت مساتریس  $Df(a)$  هست  $[\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)]$ . با توجه به این که  $f$  روی هر دو محور مقدار ثابت صفر را داراست، نتیجه می شود که  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$  و  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ . بنابراین با توجه به این که  $f(0, 0) = 0$ ، صفحه مماس در  $(0, 0)$  باید  $z = 0$  باشد. حال اگر تابع در  $(0, 0)$  مشتق پذیر می بود، طبق (۹) با قراردادن  $a = (0, 0)$  و  $\vec{h} = (x, y)$  باید می داشتیم:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

یا در مختصات قطبی:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (\cos^2 \theta |\sin \theta|) = 0$$

چون  $\cos^2 \theta |\sin \theta|$  روی هر خط گذرا از مبدأ مقدار ثابتی دارد و این مقدار ثابت غیر از روی دو محور صفر نیست، حد بالا نمی تواند برقرار باشد.

این نکته را باید تأکید کرد که علیرغم وجود  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$  و  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$  و در واقع همه مشتقهای سویی در  $(0, 0)$ ، تابع در  $(0, 0)$  مشتق پذیر نیست. مطالب این جلسه نشان دادند اگر تابع در نقطه  $a$  مشتق پذیر باشد، مشتقهای پاره‌ای، و در واقع مشتقهای سویی، همه در نقطه  $a$  وجود دارند و رابطه کلی (۱۴) برقرار است. ولی وجود مشتقهای پاره‌ای (و حتی وجود همه مشتقهای سویی)، بر مشتق پذیری دلالت نمی کند. در مثال فوق خطوط مماس در جهات مختلف در یک زیرفضای مسطح واحد قرار نگرفتند، یعنی یک تقریب خطی در برگیرنده همه جهات وجود نداشت.



در مثالی که در زیر می آید، با اینکه خطوط مماس در همه جهتها در یک صفحه قرار می گیرند، این صفحه بر نمودار مماس نخواهد بود! در واقع در مثال زیر تابع داده شده در نقطه مزبور حتی پیوسته نیست در حالیکه مشتقهای سوئی تابع در آن نقطه در همه جهات موجود است.

مثال ۴. خم  $C$  در صفحه را که در مختصات قطبی به صورت زیر تعریف شده است در نظر بگیرید:

$$r = 2\pi - \theta, \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

تصویر  $C$  در شکل ۲ نمایش داده شده است. توجه کنید که  $C$  هر خط راست گذرا از  $\underline{e}$  را

## شکل ۲

در دقیقاً دو نقطه قطع می کند. حال تابع  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{اگر } (x, y) \text{ روی } C \text{ نباشد} \\ 1 & \text{اگر } (x, y) \text{ روی } C \text{ باشد} \end{cases}$$

تحدید این تابع به هر خط گذرا از مبدأ در همه جا به استثنای دو نقطه غیر  $\underline{e}$  صفر است، پس مشتق سوئی تابع در  $\underline{e}$  در همه جهتها وجود دارد و برابر صفر است. بدین ترتیب خطوط مماس در  $\underline{e}$  در همه جهتها افقی هستند و روی صفحه  $xy$  قرار می گیرند. ولی این تابع در  $(0, 0)$  پیوسته نیست زیرا اگر به  $(0, 0)$  در طول  $C$  نزدیک شویم مقدار  $f$  به ۱ میل می کند و اگر از بیرون  $C$  نزدیک شویم مقدار  $f$  به ۰ میل می کند. این تابع در  $(0, 0)$  مشتق پذیر نیست زیرا طبق گزاره زیر اگر  $f$  در نقطه ای مشتق پذیر باشد، در آن نقطه پیوسته نیز هست.

(۲۱-۳) گزاره. اگر  $f$  در  $a$  مشتق پذیر باشد،  $f$  در  $a$  پیوسته است.

برهان. طبق تعریف مشتق پذیری داریم

$$\lim_{\vec{h} \rightarrow \circ} \frac{|f(a + \vec{h}) - f(a) - Df(a)(\vec{h})|}{|\vec{h}|} = \circ$$

پس حد صورت زیر صفر است

$$\lim_{\vec{h} \rightarrow \circ} |f(a + \vec{h}) - f(a) - Df(a)(\vec{h})| = \circ$$

چون  $Df(a)$  یک تابع خطی است،  $Df(a)$  پیوسته است و مقدار تابع خطی در  $\vec{h} = \underline{\circ}$  برابر صفر

است، پس داریم:

$$\lim_{\vec{h} \rightarrow \circ} |f(a + \vec{h}) - f(a)| = \circ$$

■ که این در واقع بیان پیوستگی  $f$  در نقطه  $a$  است.

## مشتق و تقریب خطی (۳)

مثالهای بخش پیشین نشان داد که تحقیق مشتق‌پذیری در یک تابع یک نقطه از دامنه ممکن است موضوع ظریفی باشد. خوشبختانه ضابطه‌ای کافی برای مشتق‌پذیری وجود دارد که در بسیاری موارد کارساز و قابل استفاده است. قضیه زیر بیان این ضابطه است:

(۲۴-۱) قضیه. فرض کنید  $f : S \rightarrow \mathbb{R}^m$ ،  $S \subset \mathbb{R}^n$  طوری باشد که تابع‌های  $\frac{\partial f}{\partial x_i} : S \rightarrow \mathbb{R}^m$  همه در یک گوی باز حول نقطه درونی  $a$  از  $S$  وجود داشته و در نقطه  $a$  پیوسته باشند. در این صورت  $f$  در نقطه  $a$  مشتق‌پذیر است.

بدین ترتیب برای تحقیق مشتق‌پذیری  $f$  کافی است پس از اطمینان از این که مشتق‌های پاره‌ای در نزدیکی  $a$  وجود دارند، پیوستگی هر یک را در آن نقطه تحقیق کنیم. اثبات زیر در واقع نشان می‌دهد که پیوستگی  $(n-1)$  مشتق پاره‌ای در نقطه  $a$  و وجود مشتق پاره‌ای باقیمانده در آن نقطه برای مشتق‌پذیری کافی است.

برهان. قضیه را نخست در حالت دو متغیری ثابت می‌کنیم که ایده اصلی را نشان می‌دهد، سپس روش تعمیم آن به  $n$  متغیر را توضیح می‌دهیم. بدین ترتیب فرض کنید  $S \subset \mathbb{R}^2$ ،  $(a, b)$  یک نقطه درونی  $S$  است،  $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$  وجود دارد، و  $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$  در یک گوی باز حول  $(a, b)$  وجود دارد و در نقطه  $(a, b)$  پیوسته است. برای مشتق‌پذیری  $f$  در  $(a, b)$  باید ثابت کنیم:

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(a+h, b+k) - [f(a, b) + h \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + k \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)]}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0 \quad (1)$$

چون  $(a, b)$  یک نقطهٔ درونی  $S$  است، در بالا و در باقیمانده بحث می‌توان فرض کرد که  $|h| > 0$  و  $|k| > 0$  آنقدر کوچک هستند که مستطیل  $a - |h| \leq x \leq a + |h|$ ،  $b - |k| \leq y \leq b + |k|$  در دامنهٔ تعریف  $S$  قرار دارد. صورت کسر (۱) را با افزودن و کم کردن عبارت  $f(a + h, b)$  به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$[f(a + h, b + k) - f(a + h, b) - k \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)] + [f(a + h, b) - f(a, b) - h \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)]$$

بنابراین کافی است دو حد زیر را تحقیق کنیم

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{|f(a + h, b) - f(a, b) - h \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)|}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0 \quad (2)$$

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{|f(a + h, b + k) - f(a + h, b) - k \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)|}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0 \quad (3)$$

در مورد (۲) داریم

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(a+h, b) - f(a, b) - h \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| &\leq \left| \frac{f(a+h, b) - f(a, b) - h \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)}{h} \right| \\ &= \left| \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h} - \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \right| \end{aligned}$$

و اینکه حد عبارت سمت راست صفر است به معنای وجود مشتق  $\frac{\partial f}{\partial x}$  در  $(a, b)$  است. برای (۳)، از آنجا که  $\frac{\partial f}{\partial y}$  در یک گوی حول  $(a, b)$  تعریف شده است، با تثبیت  $h$  کوچک،  $f(a + h, y)$  برای  $y$  در نزدیکی  $b$  تابعی مشتق‌پذیر نسبت به متغیر دوم است و با استفاده از قضیهٔ میانگین یک متغیری می‌توان نوشت:

$$f(a + h, b + k) - f(a + h, b) = k \frac{\partial f}{\partial y}(a + h, b')$$

که در آن  $b'$  بین  $b$  و  $b + k$  است. پس صورت کسر (۳) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$k \left[ \frac{\partial f}{\partial y}(a + h, b') - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \right]$$

حال چون  $1 \leq \left| \frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}} \right|$ ، قدرمطلق کسر (۳) کوچکتر یا مساوی  $\left| \frac{\partial f}{\partial y}(a+h, b') - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \right|$  است. از آنجاکه  $b'$  بین  $b$  و  $b+k$  است، وقتی  $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ ، نقطه  $(a+h, b')$  به  $(a, b)$  میل می‌کند و چون  $\frac{\partial f}{\partial y}$  در  $(a, b)$  پیوسته فرض شده است، این عبارت به صفر میل می‌کند و اثبات حکم کامل می‌شود. برای اثبات حکم در حالت  $n$  متغیری، روش بالا را به صورت زیر تعمیم می‌دهیم. فرض کنید نقطه درونی  $a = (a_1, \dots, a_n)$  از مجموعه  $S$  داده شده است و نقطه  $(a_1 + h_1, \dots, a_n + h_n)$  در دامنه  $f$  طوری است که مستطیل  $a_1 - |h_1| \leq x_1 \leq a_1 + |h_1|, \dots, a_{n-1} - |h_{n-1}| \leq x_{n-1} \leq a_{n-1} + |h_{n-1}|$  به تمامی در دامنه تعریف  $f$  قرار می‌گیرد. حال با تفریق و افزودن مقدار  $(n-1)$   $f(a_1 + h_1, \dots, a_{n-1} + h_{n-1}, a_n)$ ،  $f(a_1 + h_1, \dots, a_{n-2} + h_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$ ،  $\dots$ ، عبارت  $f(a_1 + h_1, a_2, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n) - \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$  را به صورت مجموع  $n$  عبارت زیر می‌نویسیم:

$$[f(a_1 + h_1, \dots, a_n + h_n) - f(a_1 + h_1, \dots, a_{n-1} + h_{n-1}, a_n) - h_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)] + \dots + [f(a_1 + h_1, a_2, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_{n-1}, a_n) - h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)]$$

و نشان می‌دهیم نسبت تقسیم قدرمطلق هر کروشه بر  $\sqrt{h_1^2 + \dots + h_n^2}$  به صفر میل می‌کند. برای کروشه آخر، این امر از وجود  $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)$  نتیجه می‌شود و برای سایر کروشها مثل استدلال بالا از قضیه میانگین و پیوستگی  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  در نقطه  $a$  استفاده می‌کنیم. استدلال عین بالا است.  $\square$

مثال. به مثالی که در هر یک از دو بخش قبل مورد بحث قرار گرفت باز می‌گردیم، یعنی تابع  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  با ضابطه:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

دیدیم که این تابع در  $(0, 0)$  مشتق‌پذیر نیست. و در عین حال  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$  و  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$  وجود دارند. بنابراین طبق قضیه هیچ‌یک از  $\frac{\partial f}{\partial y}$   $\frac{\partial f}{\partial x}$  نمی‌توانند در  $(0, 0)$  پیوسته باشند. ضمناً برای  $\frac{\partial f}{\partial y}$  در دو

بخش قبل عبارت زیر را به دست آوریم:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

در مختصات قطبی خارج از  $(0, 0)$  داریم  $\frac{\partial f}{\partial y} = \cos^2 \theta (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$  روی محور  $x$ ،  $\theta = 0, \pi$  و  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, 0) = 1$  برقرار است. بنابراین حد  $\frac{\partial f}{\partial y}$  وقتی  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  برابر  $0$  نیست، و  $\frac{\partial f}{\partial x}$  در  $(0, 0)$  پیوسته نیست. مشابهاً با محاسبه  $\frac{\partial f}{\partial x}$  در نقاط خارج از مبدأ می توان مشاهده کرد که  $\frac{\partial f}{\partial x}$  نیز در  $(0, 0)$  پیوسته نیست.

اکنون به جنبه های کاربردی تر تقریب خطی می پردازیم. همان طور که دیدیم در بین تابع های درجه یک که نمودارشان از یک نقطه خاص نمودار تابع داده شده می گذرد، تقریب خطی یگانه تابعی است که تفاضل مقادارش با مقدار متناظر تابع داده شده سریعتر از فاصله متغیر از نقطه مورد بحث به صفر میل می کند. این ویژگی باید روش تقریب مناسبی را پیش پای ما بگذرد زیرا که از یک سو تقریب خوبی مطرح است و از سویی دیگر محاسبه تابع های درجه یک بسیار ساده است.

مثال ۱. به کمک روش تقریب خطی، مقداری تقریبی برای  $\sqrt{x^2 - y}$  پیدا کنید وقتی  $x = 2/9$  و  $y = 1/1$ . ملاحظه می کنیم که به ازای  $a = 3$  و  $b = 1$ ، داریم  $\sqrt{a^2 - b} = 2$  و نقطه  $(x, y) = (2/9, 1/1)$  را می توان برای بعضی مقاصد نزدیک نقطه  $(a, b)$  فرض کرد. تابع  $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y}$  را در نظر می گیریم. مشتق های پاره ای این تابع نسبت به  $x$  و  $y$  وجود دارند و پیوسته اند وقتی زیر  $\sqrt{\quad}$  صفر شود، یعنی وقتی  $y \neq x^2$ . نقطه  $(3, 1)$  روی  $y = x^2$  نیست، پس در یک گوی باز حول آن (که شامل  $(2/9, 1/1)$  نیز می شود) مشتق های پاره ای وجود دارند. در واقع

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{3}(x^2 - y)^{-\frac{3}{2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{3}(x^2 - y)^{-\frac{3}{2}}$$

تقریب خطی  $f$  را در نقطه  $(a, b) = (3, 1)$  می‌نویسیم:

$$A(x, y) = 2 + \frac{\partial f}{\partial x}(3, 1)(x - 3) + \frac{\partial f}{\partial y}(3, 1)(y - 1)$$

$$A(2/9, 1/1) = 2 + \frac{1}{9}(-0/1) + \left(\frac{-1}{13}\right)(0/1)$$

$$= 2 - \frac{1}{13}$$

پس طبق تقریب خطی:

$$\sqrt[3]{(2/9)^2 - (1/1)} \simeq 2 - \frac{1}{13} - \frac{1}{130} \simeq 1/941667$$

در اینجا روش دیگری برای استفاده از تقریب خطی به نظر می‌رسد. داریم  $\sqrt[3]{(2/9)^2 - (1/1)} = \sqrt[3]{7/31}$  می‌توان این مسأله را به صورت تقریب خطی یک متغیری مطرح کرد. تابع  $f(t) = \sqrt[3]{t}$  در نظر بگیرید. داریم  $f(8) = 2$  و می‌خواهیم مقداری تقریبی برای  $f(7/31) = f(8 - 0/69)$  پیدا کنیم. طبق تقریب خطی یک متغیری:

$$f(7/31) \simeq f(8) - (0/69)f'(8)$$

حال  $f'(t) = \frac{1}{3}t^{-2/3}$  پس  $f'(8) = \frac{1}{13}$  و

$$f(7/31) \simeq 2 - \frac{69}{1300} = 1/9425$$

کدامیک از دو تقریب به واقعیت نزدیکتر است؟ تابع دو متغیری  $f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 - y}$  را در نظر بگیرید. ترکیب‌های مختلفی از  $x$  و  $y$  منجر به  $\sqrt[3]{7/31}$  می‌شوند. در واقع با قرار دادن  $x^2 - y = 7/31$  یک سهمی در صفحه  $xy$  به دست می‌آید که جزیی از آن "نزدیک" نقطه  $(3, 1)$

شکل ۱

است. بخشی از نمودار  $f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 - y}$  را که بالای سر این منحنی قرار دارد در نظر بگیرید که یک منحنی روی نمودار می‌شود. نقاط مختلف این منحنی از تقریب خطی در نقطه  $(3, 1)$  فواصل

گوناگون دارند، یعنی تقریب خطی در  $(3, 1)$  جوابی یکسان برای همه این نقاط نمی‌دهد، که امری طبیعی است. برای هر چنین  $(x, y)$ ، دو مقدار  $(x - 3)$  و  $(y - 1)$  بر تقریب خطی به دست آمده اثر دارند. در تقریب خطی یک متغیری، همه این نقاط به صورت یک نقطه روی محور  $t$  دیده می‌شوند و تقریبی که به دست می‌آید نسبت به پستی بلندی‌های نمودار  $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y}$  حساس نیست. جمع‌بندی بحث بالا این است که اگر مسأله اولیه به طور طبیعی یک مسأله دو متغیری باشد، بهتر است تقریب خطی دو متغیری در نظر گرفته شود که تمایز میان نقاط مختلفی که منجر به یک مسأله یک متغیری می‌شوند نادیده گرفته نشود. بالعکس اگر یک مسأله یک متغیری را به روش‌های گوناگون به مسأله‌ای دو متغیری مبدل کنیم، جواب‌های گوناگونی حاصل خواهند شد که هر یک ممکن است وابسته به فرض‌های اضافی و بعضاً غیرطبیعی باشد. در مثال ۱ که مسأله به صورت دو متغیری مطرح بود، روش طبیعی، استفاده از تقریب خطی دو متغیری است.

مثال ۲.  $S \subset \mathbb{R}^n$  را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$S = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i > 0, i = 1, \dots, n\}$$

و تابع  $f: S \rightarrow \mathbb{R}$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x_1, \dots, x_n) = cx_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \quad (4)$$

که در آن  $c, \alpha_1, \dots, \alpha_n$  اعداد حقیقی مثبت داده شده‌اند. این گونه تابع در بعضی مسائل اقتصادی مطرح می‌شود که در آن  $x_i$  ها مقادیر عوامل مختلف تولید هستند ولی منحصر به این نوع کاربرد نیستند. سؤالی که مطرح می‌کنیم این است که اگر عوامل  $x_1, \dots, x_n$  به ترتیب با دقت نسبی  $r_1, \dots, r_n$  درصد معلوم باشند، نتیجه محاسبه، یعنی  $f(x_1, \dots, x_n)$  با چه دقت نسبی تعیین می‌شود؟ اگر  $a_1, \dots, a_n$  "مقادیر واقعی" متغیرهای  $x_1, \dots, x_n$  باشند، خطاهای نسبی به ترتیب



هستند  $\frac{x_1 - a_1}{a_1}, \dots, \frac{x_n - a_n}{a_n}$  را به  $x_i - a_i$  نیز نمایش می‌دهیم. طبق فرمول تقریب خطی داریم:

$$f(x_1, \dots, x_n) \simeq f(a_1, \dots, a_n) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(a) \Delta x_i \quad (5)$$

با مشتق‌گیری از (۱) داریم:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = c \alpha_i x^{\alpha_1} \dots x_{i-1}^{\alpha_{i-1}} x_i^{\alpha_i - 1} x_{i+1}^{\alpha_{i+1}} \dots x_n^{\alpha_n} = \frac{\alpha_i}{x_i} f(x)$$

بنابراین با جایگزینی در (۲):

$$\Delta f = f(x) - f(a) \simeq f(x) \sum_{i=1}^n \alpha_i \Delta x_i$$

در نتیجه خطای نسبی  $f$ ، یعنی  $\frac{\Delta f}{f}$ ، از تقریب خطی به صورت زیر است:

$$\frac{\Delta f}{f} \simeq \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\Delta x_i}{x_i}$$

حال اگر خطای نسبی  $x_i$  برابر  $r_i$  درصد باشد، نتیجه می‌شود که خطای نسبی در محاسبه  $f$  حدوداً

$\sum_{i=1}^n \alpha_i r_i$  درصد خواهد بود.

## مشتق‌های پاره‌ای مرتبه بالا، قاعده زنجیره‌ای

فرض کنید  $a, S \subset \mathbb{R}^n$ ، یک نقطه درونی  $S$  است و برای  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ ،  $y = f(x)$ ، مشتق پاره‌ای  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  در همه نقاط یک گوی باز حول  $a$  تعریف شده است. در این صورت  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  خود یک تابع با مقدار حقیقی است که نقطه  $a$  یک نقطه درونی دامنه آن است. بدین ترتیب می‌توان برای تابع  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  وجود مشتق پاره‌ای نسبت به متغیر  $x_j$  را در نقطه  $a$  مطرح کرد.  $(\frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial f}{\partial x_i}))(a)$  را در صورت وجود به نمادهای زیر نمایش می‌دهیم

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_j \partial x_i}(a), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a), \quad D_{ij}f(a), \quad f_{x_i x_j}(a) \quad (1)$$

و آن را یک مشتق پاره‌ای مرتبه دوم  $f$  در نقطه  $a$  می‌نامیم. برای تابع  $n$  متغیری  $y = f(x_1, \dots, x_n)$  می‌توان  $n^2$  مشتق پاره‌ای مرتبه دوم در نظر گرفت زیرا که در (۱)،  $i, j$  هر یک عدد صحیحی بین ۱ و  $n$  هستند. معمولاً به جای  $\frac{\partial^2 y}{\partial x_j \partial x_i}$  می‌نویسیم  $\frac{\partial^2 y}{\partial x_j^2}$ .

به همین ترتیب، اگر مشتق پاره‌ای مرتبه دوم  $\frac{\partial^2 y}{\partial x_j \partial x_i}$  در یک گوی باز حول  $a$  تعریف شده باشد، می‌توان وجود مشتق پاره‌ای مرتبه سوم  $\frac{\partial^3 y}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_k}(\frac{\partial^2 y}{\partial x_j \partial x_i})$  را بررسی نمود، و همین طور مشتق‌های پاره‌ای مرتبه‌های بالاتر.

نکته مهم در مورد مشتق‌های پاره‌ای مرتبه دو به بالا این است که تحت شرایط سهل الوصول، ترتیب مشتق‌گیری نسبت به متغیرهای مختلف اثری بر نتیجه نهایی ندارد، بلکه تنها عامل اثرگذار تعداد دفعاتی است که مشتق‌گیری نسبت به متغیر خاص صورت گرفته است. قضیه زیر نمونه‌ای از این نوع احکام است:

(۹-۱) قضیه. فرض کنید  $S$  زیرمجموعه‌ای از  $\mathbb{R}^n$  باشد،  $a$  یک نقطه درونی  $S$  و  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  یک تابع به طوری که  $\frac{\partial^2 y}{\partial x_j \partial x_i}$  و  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$  هر دو در یک گوی باز حول  $a$  تعریف شده و در نقطه  $a$  پیوسته

هستند. در این صورت:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) \quad (۲)$$

بدیهی است که می‌توان با به‌کارگیری مکرر این قضیه، حکم را به مشتق‌های پاره‌ای مرتبه‌های بالاتر تعمیم داد.

اثبات قضیه. برای سهولت در نوشتن، حالت  $n = ۲$  را در نظر می‌گیریم. اثبات حالت کلی عیناً به همین صورت است، کافی است استدلال را به صفحه  $(x_i, x_j)$  محدود کنیم. بدین ترتیب نقاط  $S$  را به  $(x, y)$  و نقطهٔ درونی مورد نظر را به  $(a, b)$  نمایش می‌دهیم. اگر  $|h|$  و  $|k|$  به اندازه کافی کوچک باشند، مستطیل  $b \leq y \leq b+k, a \leq x \leq a+h$  (در صورتی که هر یک از  $h, k$  منفی باشد، جهت نامساوی مربوط را معکوس کنید) در درون دامنه تعریف  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$  و  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$  قرار می‌گیرد. از سه تابع کمکی  $u, Q, v$  به شرح زیر استفاده می‌کنیم:

$$Q(h, k) = f(a+h, b+k) - f(a+h, b) - f(a, b+k) + f(a, b) \quad (۳)$$

$Q$  تفاضل مجموع مقدار  $f$  در دو رأس مقابل مستطیل و دو رأس مقابل دیگر است.

$$u(x) = f(x, b+k) - f(x, b) \quad (۴)$$

$$v(y) = f(a+h, y) - f(a, y) \quad (۵)$$

بدین ترتیب  $u$  و  $v$ ، به ترتیب، تفاضل  $f$  در دو انتهای پاره‌خط‌های قائم و افقی را نمایش می‌دهند.

?

داریم

$$Q(h, k) = u(a+h) - u(a) \quad (۶)$$

و نیز

$$Q(h, k) = v(b + k) - v(b) \quad (7)$$

طبق قضیه مقدار میانگین یک متغیری، برای  $u$  داریم:

$$u(a + h) - u(a) = h \cdot u'(\xi) \quad (8)$$

که در آن  $\xi$  بین  $a$  و  $a + h$  است. ضمناً مشتق  $u$  طبق (۴) از مشتق گیری  $f$  نسبت به  $x$  به دست می آید، پس از (۶) و (۸):

$$Q(h, k) = h \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, b + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, b) \right] \quad (9)$$

حال اگر تابع  $\frac{\partial f}{\partial x}$  را به عنوان تابعی از متغیر دوم آن در نظر بگیریم، طبق قضیه میانگین یک متغیری داریم:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\xi, b + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, b) = k \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\xi, \eta) \quad (10)$$

که در اینجا  $\eta$  بین  $b$  و  $b + k$  است. پس

$$Q(h, k) = hk \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\xi, \eta) \quad (11)$$

حال به همین ترتیب، اگر به جای  $u$ ، از  $v$  استفاده کنیم، نقطه  $\eta'$  بین  $b$  و  $b + k$ ، نقطه  $\xi'$  بین  $a$  و  $a + h$  به دست می آیند که:

$$Q(h, k) = kh \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\xi', \eta') \quad (12)$$

از مقایسه (۱۱) و (۱۲) نتیجه می شود که

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\xi', \eta') = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\xi, \eta) \quad (13)$$

توجه کنید که  $(\xi, \eta)$  و  $(\xi', \eta')$  دو نقطه در مستطیل شکل ۱ هستند، پس وقتی  $(\circ, \circ) \rightarrow (h, k)$  هر دو نقطه به  $(a, b)$  میل می کنند. از پیوستگی  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  و  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  در  $(a, b)$  نتیجه می شود که:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b)$$

■ چنان که حکم بود.

مثال ۱. برای  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ،  $f(x, y) = xe^y - y^2 x^3$ ، مشتق های پاره ای مرتبه دوم را محاسبه کنید.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^y - 3x^2 y^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = xe^y - 2yx^3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -6xy^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = e^y - 6x^2 y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = xe^y - 2x^3$$

مثال ۲. کلیه مشتق های پاره ای از همه مراتب  $f(x, y) = ye^x$  را محاسبه کنید.

از عبارت بالا مشخص است که همه مشتق های پاره ای از همه مراتب وجود دارند و پیوسته خواهند بود، بنابراین ترتیب مشتق گیری اهمیتی ندارد. اگر از عبارت فوق یک بار نسبت به  $y$  مشتق گیری شود، متغیر  $y$  حذف می شود، پس می توان نوشت

$$l \geq 2 \text{ اگر } \frac{\partial^{k+l} f}{\partial x^k \partial y^l} = 0$$

همچنین نتایج زیر نیز به دست می آیند:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^k} = ye^x, \quad \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^k \partial y} = e^x$$

## قاعده زنجیره‌ای

یکی از مهمترین و مؤثرترین حربه‌های حساب دیفرانسیل و انتگرال یک متغیری قاعده زنجیره‌ای است که مشتق ترکیب دو تابع مشتق‌پذیر را بیان می‌کند. فرض کنید  $I$  و  $J$  دو بازه در  $\mathbb{R}$  باشند  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  و  $g: J \rightarrow \mathbb{R}$  دو تابع،  $a$  یک نقطه درونی  $I$  و  $b = f(a)$  یک نقطه درونی  $J$ . حال اگر  $f$  در  $a$  و  $g$  در  $b = f(a)$  مشتق‌پذیر باشد، آنگاه  $g \circ f$  در  $a$  مشتق‌پذیر است و:

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a) \quad (14)$$

این رابطه به قاعده زنجیره‌ای معروف است. روش دیگری برای نوشتن (۱۴) این است که بنویسیم  $y = f(x)$  و  $z = g(y)$ ، آنگاه (۱۴) به صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{dz}{dx}(a) = \frac{dz}{dy}(b) \cdot \frac{dy}{dx}(a) \quad (15)$$

در وضعیت چند متغیری، رابطه مشابهی برقرار است. فرض کنید  $S$  و  $T$  به ترتیب زیرمجموعه‌های  $\mathbb{R}^n$  و  $\mathbb{R}^m$  باشند،  $f: S \rightarrow \mathbb{R}^m$  و  $g: T \rightarrow \mathbb{R}^p$  دو تابع،  $a$  یک نقطه درونی  $S$  و  $b = f(a)$  یک نقطه درونی  $T$ . حال اگر  $f$  در  $a$  و  $g$  در  $b = f(a)$  مشتق‌پذیر باشد، قاعده زنجیره‌ای حکم می‌کند که  $g \circ f$  در  $a$  مشتق‌پذیر است و

$$(D(g \circ f))(a) = Dg(f(a))Df(a) \quad (16)$$

توجه کنید که در اینجا  $Df(a)$  یک ماتریس  $m \times n$ ،  $Dg(f(a))$  یک ماتریس  $p \times m$  و  $(D(g \circ f))(a)$  یک ماتریس  $p \times n$  است. در طرف راست (۱۶) حاصل ضرب دو ماتریس در نظر گرفته شده است.

?

اگر نقاط  $\mathbb{R}^n$  را به  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ، نقاط  $\mathbb{R}^m$  را به  $y = (y_1, \dots, y_m)$  و نقاط  $\mathbb{R}^p$  را به  $z = (z_1, \dots, z_p)$  نمایش دهیم، تابع‌های  $f$  و  $g$  به صورت  $y = f(x)$  و  $z = g(y)$  نوشته می‌شوند و  $z = (g \circ f)(x)$  را می‌توان بدین صورت نیز نوشت:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial z_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial z_p}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial z_p}{\partial x_n}(a) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial y_1}(b) & \dots & \frac{\partial z_1}{\partial y_m}(b) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial z_p}{\partial y_1}(b) & \dots & \frac{\partial z_p}{\partial y_m}(b) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n}(a) \end{bmatrix} \quad (17)$$

یا به اختصار

$$\left[ \frac{\partial z}{\partial x}(a) \right] = \left[ \frac{\partial z}{\partial y}(b) \right] \left[ \frac{\partial y}{\partial x}(a) \right] \quad (18)$$

شباهت ظاهری (۱۶)، (۱۷) یا (۱۸) به قاعده زنجیری یک متغیری آشکار است. تنها تفاوت این است که در حالت  $m = n = p = 1$  همه ماتریس‌ها  $1 \times 1$  هستند، بنابراین ضرب ماتریسی به صورت یک ضرب عادی ظاهر می‌شود.

با توجه به روش محاسبه حاصل ضرب ماتریس‌ها، می‌توان از (۱۷) فرمول صریحی برای  $\frac{\partial z_i}{\partial x_j}(a)$

استخراج کرد:

$$\frac{\partial z_i}{\partial x_j}(a) = \frac{\partial z_i}{\partial y_1}(b) \frac{\partial y_1}{\partial x_j}(a) + \dots + \frac{\partial z_i}{\partial y_m}(b) \frac{\partial y_m}{\partial x_j}(a) \quad (19)$$

هر یک از (۱۶)، (۱۷)، (۱۸) یا (۱۹) به قاعده زنجیره‌ای چند متغیری معروفند.

مثال ۱.  $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  به صورت  $z = \varphi(x, y) = x^2 - y^2$  تعریف شده است. می‌خواهیم  $z$  را بر حسب مختصات قطبی  $(r, \theta)$ ،  $x = r \cos \theta$ ،  $y = r \sin \theta$  در نظر گرفته، آهنگ تغییرات لحظه‌ای  $z$  را نسبت به  $r$  و  $\theta$  محاسبه کنیم. در این مثال ساده می‌توان  $z$  را صریحاً بر حسب  $r$  و  $\theta$  نوشت و سپس مشتق‌گیری کرد. داریم

$$z = r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta$$

پس

$$\frac{\partial z}{\partial r} = 2r \cos^2 \theta - 2r \sin^2 \theta = 2r \cos 2\theta$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = -2r^2 \cos \theta \sin \theta - 2r^2 \sin \theta \cos \theta = -2r^2 \sin 2\theta$$

اکنون تحقیق می‌کنیم که از روش قاعدهٔ زنجیره‌ای نیز به همین نتیجه می‌رسیم. نمایش  $(x, y)$  بر حسب  $(r, \theta)$  را به  $\psi$  نمایش می‌دهیم،  $(x, y) = \psi(r, \theta)$ . پس در اینجا هدف یافتن مشتق  $z = (\varphi \circ \psi)(r, \theta)$  است. طبق قاعدهٔ زنجیره‌ای:

$$\left[ \frac{\partial z}{\partial r} \quad \frac{\partial z}{\partial \theta} \right] = \left[ \frac{\partial z}{\partial x} \quad \frac{\partial z}{\partial y} \right] \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix}$$

درایه‌های ماتریس‌های طرف راست را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x = 2r \cos \theta \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2y = -2r \sin \theta \quad (20)$$

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos \theta \quad , \quad \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r \sin \theta \quad , \quad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin \theta \quad , \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r \cos \theta$$

پس

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial z}{\partial r} \quad \frac{\partial z}{\partial \theta} \right] &= [2r \cos \theta \quad -2r \sin \theta] \begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{bmatrix} \\ &= [2r \cos^2 \theta - 2r \sin^2 \theta \quad -2r^2 \cos \theta \sin \theta - 2r^2 \sin \theta \cos \theta] \\ &= [2r \cos 2\theta \quad -2r^2 \sin 2\theta] \end{aligned}$$

در این مثال ساده، محاسبه مستقیم کوتاه‌تر بود، ولی معمولاً قاعدهٔ زنجیره‌ای ساده‌تر است و حتی گاهی جایگزین مستقیم عملی نیست، علاوه بر آن که قاعدهٔ زنجیره‌ای برای اثبات بعضی فرمول‌ها و قضایا اجتناب‌ناپذیر است. از فرمول‌های (20) که مشتقات پاره‌ای مختصات دکارتی را بر حسب مختصات قطبی ارائه می‌کنند، استفادهٔ زیادی خواهیم کرد.

**مثال 2.** می‌خواهیم معکوس روابط (20)، یعنی مشتق‌های پاره‌ای  $r$  و  $\theta$  را بر حسب  $x$  و  $y$  محاسبه کنیم. نخست توجه کنید که ارتباط  $(x, y)$  با  $(r, \theta)$  یک به یک نیست زیرا با افزودن ضربی از  $2\pi$  به  $\theta$  می‌توان زاویهٔ معادل دیگری را نیز به دست آورد. اکنون  $\theta$  را به یک بازه، مثلاً  $0 < \theta < 2\pi$ ، و  $r$  را به مقادیر اکیداً مثبت محدود می‌کنیم که تناظری یک به یک میان بخشی از صفحه  $(x, y)$ ، دقیقاً  $\mathbb{R}^2 - \{(x, 0) \mid x \geq 0\}$  و  $\{(r, \theta) \mid r > 0, 0 < \theta < 2\pi\}$  حاصل شود. می‌نویسیم

$$(x, y) = \psi(r, \theta) \quad , \quad (r, \theta) = \psi^{-1}(x, y)$$



پس

$$(x, y) = (\psi \circ \psi^{-1})(x, y)$$

قاعده زنجیره‌ای نتیجه می‌دهد:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial y} \\ \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{bmatrix}$$

یعنی ماتریس مشتقات پاره‌ای  $(r, \theta)$  نسبت به  $(x, y)$ ، وارون ماتریس مشتقات پاره‌ای  $(x, y)$  نسبت به  $(r, \theta)$  است. با محاسبه وارون ماتریس نتیجه می‌شود:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\frac{\sin \theta}{r} & \frac{\cos \theta}{r} \end{bmatrix} \quad (21)$$

یا

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos \theta, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \sin \theta, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\sin \theta}{r}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos \theta}{r} \quad (22)$$

توجه کنید که برخلاف حالت یک متغیری که در مورد معکوس توابع  $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$ ، در اینجا  $\frac{\partial r}{\partial x} \neq \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial r}}$  زیرا متغیرهای دیگر نیز در محاسبه دخیلند. در محاسبه بالا از محدوده خاصی که برای زاویه انتخاب شد، استفاده خاصی نشد، هر محدوده دیگر همین نتیجه را می‌دهد. ولی برای مشتق‌گیری  $\theta$  نسبت به  $(x, y)$  شرط  $r \neq 0$  ضروری است.

**مثال ۳.** فرض کنید  $z = f(x, y)$  تابعی است که دارای مشتق‌های پاره‌ای مرتبه دوم پیوسته است. می‌خواهیم  $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$  را بر حسب مشتقات پاره‌ای  $z$  نسبت به  $r$  و  $\theta$  بنویسیم. نخست با استفاده از (۱۹) داریم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ &= \frac{\partial z}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial z}{\partial \theta} \left( \frac{\sin \theta}{r} \right) \quad (\text{با استفاده از (22)}) \end{aligned}$$

حال با استفاده از (۱۹) و قانون مشتق گیری حاصل ضرب:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= \left( \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial \theta \partial r} \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) \cos \theta + \left( \frac{\partial z}{\partial r} \right) \left( \frac{\partial(\cos \theta)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial(\cos \theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) \\ &- \left( \frac{\partial^2 z}{\partial r \partial \theta} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) \left( \frac{\sin \theta}{r} \right) - \left( \frac{\partial z}{\partial \theta} \right) \left( \frac{\partial(\frac{\sin \theta}{r})}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial(\frac{\sin \theta}{r})}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

و مجدداً با استفاده از (۲۲):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= \left( \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} \sin \theta + \frac{\partial^2 z}{\partial \theta \partial r} \frac{\cos \theta}{r} \right) \cos \theta + \left( \frac{\partial z}{\partial r} \right) (-\sin \theta) \left( \frac{\cos \theta}{r} \right) \\ &- \left( \frac{\partial^2 z}{\partial r \partial \theta} \sin \theta + \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} \frac{\cos \theta}{r} \right) \left( \frac{\sin \theta}{r} \right) - \left( \frac{\partial z}{\partial \theta} \right) \left( \left( \frac{-\sin \theta}{r^2} \right) \sin \theta + \left( \frac{\cos \theta}{r} \right) \left( \frac{\cos \theta}{r} \right) \right) \\ &= (\sin \theta) \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \left( \frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{r} \right) \frac{\partial^2 z}{\partial r \partial \theta} - \frac{(\sin \theta)(\cos \theta)}{r^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} - \frac{(\sin \theta)(\cos \theta)}{r} \frac{\partial z}{\partial r} \\ &+ \left( \frac{-\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{r^2} \right) \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{aligned}$$

مثال ۴. (اصل بقاء انرژی) یک دستگاه تابع مکانیک نیوتنی در نظر می‌گیریم که حالت آن در لحظه  $t$  با مختصات مکانی  $(x_1, \dots, x_n)$  و مختصات سرعت  $(v_1, \dots, v_n)$  مشخص شده باشد. مثلاً اگر  $k$  ذره تحت گرانش متقابل در حال حرکت باشند،  $n = 3k$ ،  $(x_1, x_2, x_3)$  مختصات فضایی ذره اول،  $(x_4, x_5, x_6)$  مختصات فضایی ذره دوم،  $\dots$ ،  $(v_1, v_2, v_3)$  مؤلفه‌های بردار سرعت ذره اول، و غیره، هستند. فرض اساسی فیزیکی این است که تابعی  $U(x_1, \dots, x_n)$  (فقط تابع مختصات مکانی و موسوم به پتانسیل) وجود دارد که بردار نیرو،  $\vec{F}$ ، به صورت زیر داده می‌شود:

$$\vec{F} = (F_1, \dots, F_n) = \left( -\frac{\partial U}{\partial x_1}, \dots, -\frac{\partial U}{\partial x_n} \right) \quad (23)$$

تابع انرژی  $E: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E(x_1, \dots, x_n, v_1, \dots, v_n) = U + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2$$

که در اینجا  $m_1, \dots, m_n$  ثابت‌های مثبتی به نام جرم هستند. در مثال بالا  $m_1 = m_2 = m_3$  منسوب به ذره اول،  $m_4 = m_5 = m_6$  منسوب به ذره دوم، و غیره، است. اصل بقاء انرژی، که در اینجا با

فرض (۲۳) به صورت قضیه ثابت می‌شود، بیانگر این واقعیت است که  $E$  در طول تحول دستگاه ثابت می‌ماند. به بیان دیگر  $(x_1, \dots, x_n)$  و  $(v_1, \dots, v_n)$  در طی زمان تغییر می‌کنند ولی  $E$  که تابعی از این متغیرهاست همواره ثابت می‌ماند. حال هر یک از  $x_i$  ها و  $v_i$  ها خود تابعی از زمان است، پس نهایتاً می‌توان  $E$  را بر حسب  $t$  بیان کرد و اصل بقاء انرژی معادل این خواهد بود که:

$$\frac{dE}{dt} = 0 \quad (24)$$

با استفاده از قاعده زنجیره‌ای، (۱۹) داریم:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial E}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \dots + \frac{\partial E}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt} + \frac{\partial E}{\partial v_1} \frac{dv_1}{dt} + \dots + \frac{\partial E}{\partial v_n} \frac{dv_n}{dt}$$

ولی  $\frac{dx_i}{dt} = v_i$  و  $\frac{dv_i}{dt} = a_i$  مؤلفه  $i$  ام بردار شتاب،  $\vec{a}$  می‌باشد. طبق قانون نیوتن

$$\vec{F} = (m_1 a_1, \dots, m_n a_n) \text{ پس:}$$

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{\partial U}{\partial x_1} v_1 + \dots + \frac{\partial U}{\partial x_n} v_n + m_1 v_1 a_1 + \dots + m_n v_n a_n \\ &= (-m_1 a_1) v_1 + \dots + (-m_n a_n) v_n + m_1 v_1 a_1 + \dots + m_n v_n a_n \quad (\text{طبق (۲۳)}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

و حکم به اثبات می‌رسد.

مثال ۵. (قضیه اویلر برای تابع‌های همگون) تابع را (به طور مثبت) همگون از درجه  $k$  می‌نامیم ( $k$  عدد حقیقی داده شده) در صورتی که برای هر  $t > 0$  داشته باشیم:

$$f(tx_1, \dots, tx_n) = t^k f(x_1, \dots, x_n) \quad (25)$$

به عنوان مثال،  $f(x, y, z) = x^2 y - z^3$  یک تابع همگون درجه ۳ است. رابطه زیر برای تابع‌های همگون درجه  $k$  برقرار است و به قضیه اویلر شهرت دارد:

$$\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = k f(x_1, \dots, x_n) \quad (26)$$

برای اثبات (۲۶) از دو طرف (۲۵) نسبت به  $t$  مشتق می‌گیریم. با استفاده از قاعده زنجیری، (۱۹) داریم:

$$\sum_{i=1}^n (D_i f)(tx_1, \dots, tx_n) \frac{d(tx_i)}{dt} = kt^{k-1} f(x_1, \dots, x_n)$$

(توجه کنید که برای اجتناب از ابهام نماد  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ، از  $D_i f$  استفاده کرده‌ایم). چون  $\frac{d(tx_i)}{dt} = x_i$ :

$$\sum_{i=1}^n (D_i f)(tx_1, \dots, tx_n) x_i = kt^{k-1} f(x_1, \dots, x_n)$$

در دو طرف قرار می‌دهیم  $t = 1$ :

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) x_i = kf(x_1, \dots, x_n)$$

همچنان که حکم بود.

## قاعده زنجیره‌ای (۲)

در این جلسه مثال‌هایی از نحوه استفاده از قاعده زنجیری ارائه خواهیم کرد.

مثال ۱. فرض کنید دمای ناحیه‌ای در  $\mathbb{R}^3$  در همسایگی نقطه  $(0, 0, 0)$  از فرمول  $T = \frac{100}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}}$  تبعیت می‌کند. مکان متحرکی مجهز به یک دماسنج در زمان  $t$  به وسیله  $(x, y, z) = (1+t, t^2, t-t^3)$  داده شده است. آهنگ تغییر دمای نمایش داده شده توسط دماسنج را در لحظه  $t = 1$  به دست آورید. در اینجا  $T$  به عنوان تابعی از  $(x, y, z)$  ارائه شده است و  $(x, y, z)$  به عنوان تابعی از زمان،  $t$ :

$$t \longrightarrow (x, y, z) \longrightarrow T$$

بنابراین قاعده زنجیری به صورت زیر در می‌آید:

$$\left[ \frac{dT}{dt} \right] = \left[ \frac{\partial T}{\partial x} \quad \frac{\partial T}{\partial y} \quad \frac{\partial T}{\partial z} \right] \begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{bmatrix}$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial T}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

در  $t = 1$  داریم  $(x, y, z) = (2, 1, 0)$ :

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial T}{\partial x} \quad \frac{\partial T}{\partial y} \quad \frac{\partial T}{\partial z} \right] \Big|_{(2, 1, 0)} &= \left[ \frac{-200x}{(1+x^2+y^2+z^2)^2}, \frac{-200y}{(1+x^2+y^2+z^2)^2}, \frac{-200z}{(1+x^2+y^2+z^2)^2} \right] \Big|_{(2, 1, 0)} \\ &= \left[ -\frac{400}{36} \quad -\frac{200}{36} \quad 0 \right] \\ &= \left[ -\frac{100}{9} \quad -\frac{50}{9} \quad 0 \right] \end{aligned}$$

از طرفی دیگر

$$\begin{aligned} \left. \left( \frac{dx}{dt} \quad \frac{dy}{dt} \quad \frac{dz}{dt} \right) \right|_{t=1} &= (1 \quad 2t \quad 1 - 3t^2) \Big|_{t=1} \\ &= (1 \quad 2 \quad -2) \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= -\frac{1}{9} - \frac{1}{9} + 0 \\ &\simeq -22/22 \end{aligned}$$

مثال ۲. تابعی  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  به صورت  $z = x^2 - y^2$  داده شده است. اگر  $(r, \theta)$  مختصات قطبی در صفحه  $xy$  باشند،  $\frac{\partial z}{\partial \theta}$  و  $\frac{\partial z}{\partial r}$  را محاسبه کنید.

در اینجا باید  $z = x^2 - y^2$  را به عنوان تابعی از  $(r, \theta)$  در نظر بگیریم و سپس  $\frac{\partial z}{\partial \theta}$  و  $\frac{\partial z}{\partial r}$  را محاسبه کنیم. در این مثال ساده می‌توان به راحتی  $z$  را برحسب  $(r, \theta)$  نوشت و محاسبه مشتق‌های پاره‌ای را انجام داد ولی اگر عبارت تعریف‌کننده تابع پیچیده‌تر باشد اغلب استفاده از قاعده زنجیری کوتاه‌تر است. برای روشن شدن روش از قاعده زنجیری استفاده می‌کنیم. داریم:

$$(r, \theta) \rightarrow (x, y) \rightarrow z$$

بنابراین قاعده زنجیری به صورت زیر در می‌آید:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix}$$

هر یک از دو ماتریس طرف راست را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{bmatrix} = [2x \quad -2y]$$

با توجه به  $y = r \sin \theta$ ،  $x = r \cos \theta$  داریم:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial r} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \\ &= (\sqrt{r} \cos \theta)(\cos \theta) + (-\sqrt{r} \sin \theta)(\sin \theta) \\ &= \sqrt{r} \cos 2\theta \\ \frac{\partial z}{\partial \theta} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ &= (\sqrt{r} \cos \theta)(-r \sin \theta) + (-\sqrt{r} \sin \theta)(r \cos \theta) \\ &= -\sqrt{r} r \end{aligned}$$

مثال ۳. در بحث مربوط به گرادیان اشاره کردیم به این مطلب که اگر  $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ ،  $S \subset \mathbb{R}^n$ ، تابعی مشتق پذیر باشد و  $\nabla f(a) \neq \mathbf{0}$ ، آنگاه  $\nabla f(a)$  بر مجموعه تراز تابع  $f$  که از نقطه  $a$  می گذرد در آن نقطه عمود است. عمود بودن بردار  $\nabla f(a)$  بر مجموعه تراز را بدین معنی گرفتیم که  $\nabla f(a)$  بر هر بردار مماس بر مجموعه تراز در نقطه  $a$  عمود است و دلایلی شهودی برای این واقعیت ارائه کردیم. اکنون اثبات دقیق تری از این مطلب به کمک قاعده زنجیری ارائه می کنیم. فرض کنید  $v$  برداری مماس بر مجموعه تراز مورد نظر در نقطه  $a$  باشد. در این صورت یک منحنی پارامتری مشتق پذیر  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ، یک بازه در  $\mathbb{R}$ ، وجود دارد که تصویر آن به تمامی روی مجموعه تراز قرار دارد، در زمانی  $t_0 \in I$  از نقطه  $a$  می گذرد،  $\alpha(t_0) = a$ ، و بردار سرعت آن برابر  $v$  است،  $\alpha'(t_0) = v$  (این مطلب نیاز به اثبات دارد که در جلسات بعد ارائه خواهد شد).

طبق تعریف مجموعه تراز،  $f$  روی مجموعه تراز گذرا از  $a$  مقداری ثابت دارد، پس  $f(\alpha(t)) = c$  که  $c \in \mathbb{R}$  مقداری ثابت است، پس  $\frac{d}{dt}(f(\alpha(t))) = 0$ ، و طبق قاعده زنجیره ای:

$$(D(f \circ \alpha))(t_0) = Df(\alpha(t_0)) \circ D\alpha(t_0)$$

یا با نوشتن  $\alpha(t) = (x_1, \dots, x_n)$

$$\frac{d}{dt}((f \circ \alpha)(t))|_{t=t_0} = \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right] \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt}(t_0) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt}(t_0) \end{bmatrix} = \nabla f(a) \cdot v$$

پس  $\nabla f(a) \cdot v = 0$  و حکم به اثبات می‌رسد.

مثال ۴ (اصل بقای انرژی برای دستگاه‌های پایسته). یک دستگاه مکانیکی نیوتنی در نظر می‌گیریم با مختصات مکانی  $(x_1, \dots, x_n)$ ، مختصات سرعتی  $(v_1, \dots, v_n)$ ، و جرم‌های  $m_1, \dots, m_n$ . مثلاً می‌توان  $k$  ذره در  $\mathbb{R}^3$  را در نظر گرفت که تحت اثر متقابل گرانشی در حرکتند. در این صورت  $n = 3k$ ، مختصات مکانی ذره اول،  $(x_1, x_2, x_3)$ ، سرعت ذره اول،  $(v_1, v_2, v_3)$ ، و جرم ذره  $m_1 = m_2 = m_3$  است.

برای ذره دوم،  $(x_4, x_5, x_6)$ ،  $(v_4, v_5, v_6)$ ، و  $m_4 = m_5 = m_6$  در نظر گرفته می‌شوند و غیره. این دستگاه را پایسته می‌نامیم در صورتی که تابعی مشتق‌پذیر  $U$  از  $(x_1, \dots, x_n)$  وجود داشته باشد (موسوم به پتانسیل) که:

$$\vec{F} = -\nabla U$$

که در اینجا  $\vec{F}$  بردار نیرو است و در فرمول نیوتن  $\vec{F} = m\vec{a}$  صدق می‌کند. مقصود از  $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$  بردار شتاب است و  $m\vec{a}$  یک خلاصه نویسی برای  $(m_1 a_1, \dots, m_n a_n)$  می‌باشد. انرژی جنبشی دستگاه را به صورت  $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2$  تعریف می‌کنیم و  $E = U + K$  را انرژی دستگاه می‌نامیم.  $E$  تابعی از  $(x_1, \dots, x_n, v_1, \dots, v_n)$  است. در سیر تحول دستگاه، این  $(2n)$  تایی به عنوان تابعی از زمان،  $t$ ، تغییر می‌کنند. می‌خواهیم ثابت کنیم

$$\frac{dE}{dt} = 0$$



یعنی  $E$  در طی تحول دستگاه ثابت می ماند. در واقع باید ثابت کنیم که مشتق ترکیب دو تابع زیر صفر است:

$$t \longrightarrow (x_1, \dots, x_n, v_1, \dots, v_n) \longrightarrow E$$

طبق قاعده زنجیره ای داریم:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial E}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial E}{\partial v_i} \frac{dv_i}{dt} \\ &= \sum_{i=1}^n \left(-\frac{\partial U}{\partial x_i}\right) v_i + \sum_{i=1}^n (m_i v_i) (a_i) \\ &= \sum_{i=1}^n (-m_i a_i) v_i + \sum_{i=1}^n (m_i v_i) (a_i) \\ &= 0 \end{aligned}$$

مثال ۵ (فرمول اویلر).  $S$  را زیرمجموعه  $\mathbb{R}^n$  متشکل از  $(x_1, \dots, x_n)$  هایی می گیریم که همه  $x_i$  ها مثبت هستند. تابع  $f: S \rightarrow \mathbb{R}$  را همگون از درجه  $d$  می نامیم در صورتی که به ازای هر  $r > 0$  داشته باشیم:

$$f(rx_1, \dots, rx_n) = r^d f(x_1, \dots, x_n) \quad (1)$$

رابطه زیر به فرمول اویلر معروف است:

$$\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = df(x_1, \dots, x_n) \quad (2)$$

برای اثبات (۱)، از دو طرف (۱) نسبت به  $r$  مشتق می گیریم. طبق قاعده زنجیره ای داریم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} [f(rx_1, \dots, rx_n)] &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} (rx_1, \dots, rx_n) \cdot \frac{\partial (rx_i)}{\partial r} \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} (rx_1, \dots, rx_n) \\ \frac{\partial}{\partial r} [r^d f(x_1, \dots, x_n)] &= dr^{d-1} f(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

با برابر قرار دادن دو طرف و جایگزینی  $r = 1$  فرمول اویلر به دست می آید.

## نقاط بحرانی

طبق معمول  $S$  را زیرمجموعه‌ای از  $\mathbb{R}^n$ ،  $a$  را یک نقطه درونی  $S$ ، و  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  را یک تابع دارای مشتق‌های پاره‌ای مرتبه اول پیوسته می‌گیریم. در این بخش به بررسی نقاط درونی  $a$  که در آن  $\nabla f(a) = \underline{0}$  می‌پردازیم. این نقاط را نقاط بحرانی تابع  $f$  می‌نامیم. با ذکر تعدادی مثال بحث را آغاز می‌کنیم.

مثال ۱ (نقطه می‌نیمم منزوی)  $f$  را به صورت  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ،  $f(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_n^2$  در نظر می‌گیریم.  $\nabla f(a) = (2x_1, \dots, 2x_n)$  و  $(0, \dots, 0)$  تنها نقطه بحرانی  $f$  است. تابع  $f$  در این نقطه صفر است و در سایر نقاط  $\mathbb{R}^n$  مقدار مثبت دارد، پس  $(0, \dots, 0)$  مینیمم تابع  $f$  است. نمودار تابع  $f$  در حالت  $n = 2$  همراه با مجموعه‌های تراز در شکل ۱ نمایش داده شده است.

مثال ۲ (نقطه ماکسیمم منزوی) اگر  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  را به صورت  $f(x_1, \dots, x_n) = -\sum_{i=1}^n x_i^2$  تعریف کنیم،  $(0, \dots, 0)$  تنها نقطه بحرانی و ماکزیمم تابع خواهد بود (شکل ۲).

در واقع هر نقطه ماکسیمم یا مینیمم موضعی که نقطه درونی دامنه تابع بوده و تابع در آن نقطه مشتق‌پذیر باشد لزوماً بحرانی است. دلیل ساده این موضوع این است که اگر دامنه  $f$  را به خط راست گذرا از  $a$  به موازات محور  $x_i$  محدود کنیم  $f$  روی این دامنه نیز ماکسیمم یا مینیمم موضعی در نقطه  $a$  خواهد داشت، پس  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$ . در واقع استدلال نشان می‌دهد که اگر تحدید  $f$  به خطوط گذرا به موازات محورها ماکسیمم موضعی یا مینیمم موضعی باشد، نقطه  $a$  بحرانی است.

مثال ۳ (نقطه زینی ساده)  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  را به صورت  $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^k x_i^2 - \sum_{i=k+1}^n x_i^2$  تعریف می‌کنیم. مجدداً  $\underline{0} = (0, \dots, 0)$  تنها نقطه بحرانی است. اگر تابع  $f$  به محورهای  $x_1, \dots, x_k$  محدود شود،  $\underline{0}$  یک نقطه مینیمم روی این محورها خواهد بود ولی تحدید  $f$  به هر یک از

محوره‌های  $x_{k+1}, \dots, x_n$  در نقطه  $\underline{e}$  یک ماکسیمم دارد. ساده‌ترین نقطه زینی در حالت  $n = 2$  برای  $f(x, y) = x^2 - y^2$  در  $(0, 0)$  مشاهده می‌شود. در شکل ۳ نمودار این تابع و مجموعه‌های تراز آن نمایش داده شده‌اند.

مثال ۴  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  به صورت  $f(x, y) = x^2$  تعریف شده است.  $\nabla f(x, y) = (2x, 0)$  که نشان می‌دهد  $f$  در سراسر محور  $y$  بحرانی است. مقدار تابع در همه این نقاط صفر است و در سایر نقاط مثبت. مجموعه تراز  $f(x, y) = c$  به ازای  $c > 0$  از دو خط راست  $x = \pm\sqrt{c}$  تشکیل شده است که برای  $c = 0$  دو خط بر هم منطبق می‌شوند. (شکل ۴)

توجه کنید که برای یک تابع دو متغیری  $f(x, y)$ ، صفحه مماس بر نمودار تابع در یک نقطه بحرانی افقی است. در مورد ماکزیمم و مینیمم منزوی این صفحه در یک طرف نمودار تابع قرار می‌گیرد، برای نقاط زینی بخشی از نمودار در یک طرف و بخشی دیگر در طرف دیگر قرار می‌گیرد. در مثال ۴ بالا صفحه مماس و نمودار در یک خط راست اشتراک دارند.

مثال ۵  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  را به صورت  $f(x, y) = x^2 + y^3$  در نظر می‌گیریم. مجدداً تنها نقطه بحرانی، نقطه  $\underline{e}$  است. در اینجا روی محور  $x$ ،  $f$  یک مینیمم در  $\underline{e}$  دارد و روی محور  $y$ ، یک نقطه عطف در همان نقطه. نمودار تابع در امتداد سه نیم‌خط از محوره‌های مختصات با دور شدن از  $\underline{e}$  صعودی است و در امتداد نیم‌خط چهارم با دور شدن از  $\underline{e}$  نزولی (شکل ۵).

نمودار تابع‌های مثال‌های ۱-۵ و مجموعه‌های تراز آنها

مثال ۶ (زین میمون) تابع  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  را در نظر بگیرید که به صورت  $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$  تعریف شده است. داریم  $\nabla f(x, y) = (3x^2 - 3y^2, -6xy)$  و  $(0, 0)$  تنها نقطه بحرانی است. توجه کنید که عبارت  $f$  به صورت زیر تجزیه می‌شود:

$$f(x, y) = x(x - \sqrt{3}y)(x + \sqrt{3}y)$$

پس مجموعه تراز  $f(x, y) = 0$  از اجتماع سه خط متقاطع  $x = \sqrt{3}y$ ،  $x = -\sqrt{3}y$  و  $x = 0$  تشکیل شده است. این سه خط صفحه  $xy$  را به ۶ ناحیه تقسیم می‌کنند (شکل ۶) که علامت  $f$  روی هر یک

نمایش داده شده است. برای  $c > 0$  کوچک یک مجموعه تراز نمونه در شکل ۶ رسم شده است که یک خم دارای سه بخش (شاخه) است. برای  $c < 0$  نیز شکل مشابهی در سه بخش دیگر صفحه مشاهده می‌شود. نمودار این تابع روی سه نیمخط  $\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$  با  $\theta = 0$  دور شدن از  $\underline{0}$  صعودی و روی سه نیمخط  $\frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}$  با دور شدن از  $\underline{0}$  نزولی است.

شکل ۶

مثال‌های بالا نشان می‌دهند که تنوع رفتار تابع‌ها حول یک نقطه بحرانی حتی در حالت دو بعدی به مراتب گسترده‌تر از حالت یک بعدی است. هدف بعدی ما ارائه نوعی "آزمون مشتق دوم" است که می‌تواند مانند آزمون مشتق دوم یک متغیری در تشخیص ماکسیمم و مینیمم موضعی یا نقاط زینی ساده می‌تواند مؤثر واقع شود. فرض کنید برای تابع  $f: S \rightarrow \mathbb{R}$  زیرمجموعه  $\mathbb{R}^n$ ، نقطه درونی  $a$  از  $S$  یک نقطه بحرانی است و  $f$  در یک گوی باز حول  $a$  دارای مشتق‌های پاره‌ای مرتبه دوم پیوسته است. چون مشتق‌های پاره‌ای مرتبه اول در نقطه  $a$  صفر هستند، قضیه تیلور با باقیمانده لاگرانژ به صورت زیر در می‌آید:

$$f(x) - f(a) = \frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\xi) \cdot (x_i - a_i)(x_j - a_j) \quad (1)$$

که در اینجا  $\xi$  نقطه‌ای روی پاره‌خط واصل از  $a$  به  $x$  است.  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\xi)$  را  $A_{ij}$  و  $x_i - a_i$  را  $X_i$  می‌نامیم و عبارت زیر را در نظر می‌گیریم:

$$X = (X_1, \dots, X_n) \quad , \quad Q(X) = \sum_{i,j=1}^n A_{ij} X_i X_j \quad (2)$$

اگر عبارت درجه دوم همگون  $Q(X)$  طوری باشد که برای  $X \neq \underline{0}$  و  $|X|$  کوچک،  $Q(X) > 0$ ، از (۱) نتیجه می‌شود که  $f$  در نقطه  $a$  یک مینیمم موضعی اکید دارد، و نیز اگر برای  $|X|$  کوچک  $X \neq \underline{0}$ ،  $Q(X)$  منفی باشد، نتیجه می‌شود که  $a$  یک نقطه ماکسیمم موضعی اکید برای  $f$  است. هرگاه برای مقادیر کوچک و ناصفر  $|X|$ ،  $Q(X)$  هم مقادیر مثبت و هم مقادیر منفی بپذیرد، به همین ترتیب می‌بینیم که  $a$  نه یک نقطه مینیمم موضعی و نه یک نقطه ماکسیمم موضعی است. بدین ترتیب چنانچه

علامت‌یابی  $Q(X)$  میسر باشد، می‌توان در مورد ماهیت نقطه بحرانی  $a$  حکم کرد. برای  $n = 2$  یک چنین علامت‌یابی بر پایه جبر مقدماتی در دسترس است. در اینجا:

$$Q(X) = A_{11}X_1^2 + 2A_{12}X_1X_2 + A_{22}X_2^2 \quad (3)$$

قرار می‌دهیم  $\Delta = A_{22}^2 - 4A_{11}A_{12}$ . داریم:

• اگر  $\Delta < 0$ ،  $Q(X)$  هم‌علامت  $A_{11}$  (و نیز  $A_{22}$ ) است مگر وقتی  $(X_1, X_2) = (0, 0)$ .

• اگر  $\Delta > 0$ ،  $Q(X)$  تغییر علامت می‌دهد.

حالت دوم را دقیقتر بررسی می‌کنیم. اگر  $A_{11} = A_{22} = 0$ ، که آنگاه  $A_{12} \neq 0$ ، و علامت  $Q(X) = 2A_{12}X_1X_2$  با علامت  $X_1$  و  $X_2$  تغییر می‌کند. بدین ترتیب دو خط راست  $x_1 = a_1$  و  $x_2 = a_2$  که از نقطه بحرانی  $a = (a_1, a_2)$  می‌گذرند صفحه را به چهاربخش تقسیم می‌کنند که علامت  $Q$  در آنها متناوباً مثبت و منفی است. بنابراین در این حالت  $a$  یک نقطه زینی است. حال فرض کنید دست کم یکی از  $A_{11}$  و  $A_{22}$  صفر نیست، مثلاً  $A_{11} \neq 0$ . اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله درجه دوم  $A_{11}t^2 + 2A_{12}t + A_{22} = 0$  باشند، می‌توان نوشت:

$$Q(X) = A_{11}(X_1 - \alpha X_2)(X_1 - \beta X_2)$$

توجه کنید که  $\alpha \neq \beta$  زیرا  $\Delta > 0$ . بنابراین وقتی نسبت  $\frac{X_1}{X_2}$  از ریشه‌ها عبور می‌کند تغییر علامت حاصل می‌شود. معادلاً  $Q = A_{11}(x_1 - \alpha x_2 - a_1 + \alpha a_2)(x_1 - \beta x_2 - a_1 + \beta a_2)$ ، دو خط راست متمایز  $x_1 - \alpha x_2 - a_1 + \alpha a_2 = 0$  و  $x_1 - \beta x_2 - a_1 + \beta a_2 = 0$  که از نقطه بحرانی  $a = (a_1, a_2)$  می‌گذرند صفحه را به چهاربخش تقسیم می‌کنند که  $Q$  در بخش‌های مجاور علامت مختلف دارد. بنابراین  $a$  یک نقطه زینی است. بحث بالا را در زیر خلاصه می‌کنیم:

آزمون مشتق دوم برای تابع‌های دو متغیری  $S$  زیرمجموعه  $\mathbb{R}^2$  است،  $a$  یک نقطه درونی  $S$ ،  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  تابعی با مشتق‌های پاره‌ای مرتبه دوم پیوسته در یک گوی باز حول  $a$  که  $a$  یک نقطه بحرانی برای آن است. در این صورت:

الف) اگر  $f_{xx} > 0$  و  $f_{xy}^2 - f_{xx}f_{yy} < 0$  در نقطه  $a$ ،  $a$  یک نقطه مینیم موضعی اکید است.

ب) اگر  $f_{xx} < 0$  و  $f_{xy}^2 - f_{xx}f_{yy} < 0$  در نقطه  $a$ ،  $a$  یک نقطه ماکسیم موضعی اکید است.

ج) اگر  $f_{xy}^2 - f_{xx}f_{yy} > 0$  در نقطه  $a$ ،  $a$  یک نقطه زینی ساده است.

ذکر چند نکته ضروری است. اول اینکه از آنجا که مشتقات پاره‌ای مرتبه دوم پیوسته فرض شده‌اند، هر علامت (مثبت یا منفی) که  $f_{xx}$  و  $f_{xy}^2 - f_{xx}f_{yy}$  در  $a$  داشته باشند، همین علامت را در یک گوی باز حول  $a$  حفظ می‌کنند، پس علامت باقیمانده لاگرانژ نیز به همین صورت است. دوم اینکه در (الف) و (ب)، از منفی بودن  $f_{xy}^2 - f_{xx}f_{yy}$  نتیجه می‌شود که  $f_{xx}$  و  $f_{yy}$  هم علامت هستند، پس می‌توان به جای علامت  $f_{xx}$  از علامت  $f_{yy}$  در نقطه  $a$  کمک گرفت. بالاخره اینکه وقتی  $f_{xy}^2 - f_{xx}f_{yy}$  در نقطه  $a$  صفر شود، نمی‌توان حکمی در مورد نوع نقطه  $a$  ابراز کرد. مثال‌های ۴، ۵ و ۶ سه نمونه متفاوت از این نوع بودند. برای تابع‌های  $f(x, y) = x^4 + y^4$  و  $f(x, y) = -(x^4 + y^4)$  و  $f(x, y) = x^4 - y^4$  عبارت  $f_{xy}^2 - f_{xx}f_{yy}$  در نقطه بحرانی  $(0, 0)$  صفر است، در حالی که این نقطه برای سه تابع فوق به ترتیب مینیم، ماکسیم و زینی می‌باشد.

اکنون تعمیم آزمون مشتق دوم به حالت  $n$  متغیری را در نظر می‌گیریم. همان طور که قبلاً اشاره کردیم اگر  $a$  یک نقطه بحرانی برای تابع  $n$  متغیری  $f$  باشد، تعیین نوع نقطه بحرانی به بررسی علامت عبارت  $Q(X) = \sum_{i,j=1}^n A_{ij} X_i X_j$  منجر می‌شود (به بحث پیرامون (۲) مراجعه کنید). در این حالت کلی نیز می‌توان با استفاده از قضیه‌ای در جبرخطی در مورد علامت  $Q(X)$  بحث کرد. ماتریس هسیان تابع  $f$  در نقطه بحرانی  $a$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Hf(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{bmatrix}$$

از آنجا که مشتق‌های پاره‌ای مرتبه دوم را پیوسته فرض کرده‌ایم این ماتریس متقارن است. برای هر ماتریس  $A = [a_{ij}]$ ،  $n \times n$  مقادیر ویژه  $A$  ریشه‌های معادله درجه  $n$  زیر برحسب  $\lambda$  هستند:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad (۴)$$

که در آن  $I$  ماتریس واحد  $n \times n$ ، یعنی  $\begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}$  است. در جبرخطی ثابت می‌شود که اگر ماتریس  $A$  متقارن باشد (مانند ماتریس هسیان)، همه ریشه‌های (۴) حقیقی هستند (تکرار ریشه‌ها ممکن است).

آزمون مشتق دوم برای تابع‌های  $n$  متغیری  $S$  زیرمجموعه  $\mathbb{R}^n$  است،  $a$  یک نقطه درونی  $S$ ،  $f: S \rightarrow \mathbb{R}$  تابعی با مشتق‌های پاره‌ای مرتبه دوم پیوسته در یک گوی باز حول  $a$  که  $a$  یک نقطه بحرانی برای آن است. مقادیر ویژه ماتریس هسیان را با منظور کردن تعدد ریشه‌ها به  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  نمایش می‌دهیم. در این صورت:

(الف) اگر همه  $\lambda_i$  ها مثبت باشند،  $a$  یک نقطه مینیم موضعی اکید است.

(ب) اگر همه  $\lambda_i$  ها منفی باشند،  $a$  یک نقطه ماکسیم موضعی اکید است.

(ج) اگر همه  $\lambda_i$  ها ناصفر باشند،  $k$  تا مثبت و  $(n - k)$  تا منفی، آنگاه  $a$  یک نقطه زینی ساده است و  $n$  امتداد متمایز در  $\mathbb{R}^n$  وجود دارد که  $f$  روی  $k$  امتداد از آنها در نقطه  $a$  مینیم موضعی دارد و روی  $(n - k)$  امتداد دیگر ماکسیم موضعی.

در حالتی که حتی یک  $\lambda_i$  صفر شود، رفتارهای دیگری نیز می‌توان انتظار داشت. اثبات آزمون خارج از برنامه ما است ولی توجه کنید که در حالت  $n = 2$ ، همان آزمون مشتق مرتبه دوم توابع دو متغیری به دست می‌آید. در اینجا ماتریس هسیان عبارت است از:

$$\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{bmatrix}$$

و مقادیر ویژه از حل معادله زیر به دست می‌آیند:

$$\det \begin{bmatrix} f_{xx} - \lambda & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} - \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - (f_{xx} + f_{yy})\lambda + f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 0 \quad (5)$$

شرط‌های (الف) و (ب) بالا وقتی برقرار می‌شوند که  $\lambda_1 \lambda_2 > 0$ ، یعنی  $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 < 0$  که این عیناً شرط داشتن ماکسیم یا مینیم موضعی است. مجموع دو ریشه معادله (۵) برابر می‌شود با  $f_{xx} + f_{yy}$ .



پس در حالت (الف) و (ب) مثبت بودن (به ترتیب منفی بودن) هر دو مقدار ویژه معادل است با این که  $f_{xx} + f_{yy} > 0$  (به ترتیب  $f_{xx} + f_{yy} < 0$ ). ولی در این حالت  $f_{xx}$  و  $f_{yy}$  همعلامتند، پس همان نتیجه آزمون مشتق توابع دو متغیری به دست می آید.

مثال نقاط بحرانی تابع  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  که به صورت  $f(x, y, z) = x^2 + 12yz + (y - z)^3$  تعریف شده است را پیدا کنید و نوع آنها را شناسایی کنید.

حل داریم  $(2x, 12z + 3(y - z)^2, 12y - 3(y - z)^2) = \nabla f(x, y, z)$ ، و دو نقطه بحرانی  $P = (0, 0, 0)$  و  $Q = (0, 1, -1)$  به دست می آیند. ماتریس هسیان در هر مورد به صورت زیر محاسبه می شود:

$$H(P) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \\ 0 & 12 & 0 \end{bmatrix}, \quad H(Q) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

در مورد  $Q$ ، مقادیر ویژه عبارتند از  $2, 12, 12$  که هر سه مثبت هستند، پس  $(0, 1, -1)$  یک نقطه مینیمم موضعی اکید است. برای  $P$  مقادیر ویژه را بررسی می کنیم:

$$\det \begin{bmatrix} 2 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 12 \\ 0 & 12 & -\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$(2 - \lambda)(\lambda^2 - 144) = 0$$

مقادیر ویژه عبارتند از  $\lambda = 2, \pm 12$ ، پس  $(0, 0, 0)$  یک نقطه زینی ساده است.

## توابع ضمنی

در حساب دیفرانسیل یک متغیری به مطلب زیر برخورد کنید. رابطه‌ای  $F(x, y) = 0$  داده شده است. اگر فرض کنیم بتوان از این رابطه  $y$  را به عنوان تابعی مشتق‌پذیر از  $x$  در نظر گرفت،  $y = f(x)$ ، می‌خواهیم مشتق این تابع، یعنی  $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ ، را محاسبه کنیم. اینکه بتوان  $y$  را به عنوان تابعی از  $x$  از  $F(x, y) = 0$  استخراج کرد نتیجه می‌دهد که  $F(x, f(x))$  به‌ازای همه مقادیر  $x$  صفر است. بنابراین مشتق عبارت  $F(x, f(x))$  نسبت به  $x$  همواره صفر خواهد بود. با استفاده از قاعده زنجیره‌ای دو متغیری داریم:

$$\frac{d}{dx}(F(x, f(x))) = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0$$

حال اگر در نقطه  $(x, y)$  داشته باشیم  $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \neq 0$ ، می‌توان نوشت:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} \quad (2)$$

روش فوق‌گاهی زیرعنوان "مشتق‌گیری ضمنی" مطرح می‌شود. این روش اغلب بر حل رابطه  $F(x, y) = 0$  برای  $y$  بر حسب  $x$  و سپس مشتق گرفتن، ارجحیت دارد. دلایل عمده برتری ادعا شده به این شرح است:

الف) ممکن است استخراج صریح  $y$  بر حسب  $x$  ناممکن یا دشوار باشد ولی مشتق را بتوان از (2) به سادگی محاسبه کرد.

ب) اگر در نقطه‌ای  $(x, y)$  داشته باشیم  $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$  و  $\frac{\partial F}{\partial x} \neq 0$ ، این امر می‌تواند دلیل بر این باشد که مماس بر خم تعریف شده به وسیله  $F(x, y) = 0$  قائم باشد. در این صورت باید بتوان  $x$  را به صورت تابعی مشتق‌پذیر از  $y$  حول  $(x, y)$  فوق‌نوشت.

ج) مهمترین دلیل این است که رابطه  $F(x, y) = 0$  عموماً  $y$  را به عنوان تابعی از  $x$  تعریف نمی‌کند. مجموعه نقاط  $(x, y)$  که در  $F(x, y) = 0$  صدق می‌کنند ممکن است مثلاً خمی مانند شکل ۱ باشد.

### شکل ۱

در اینجا از شکل چنین برمی‌آید که در نقاط  $P, Q$  و  $S$  مماس بر خم قائم است و در نقطه  $R$ ، نه  $y$  تابعی مشتق‌پذیر از  $x$  است و نه  $x$  تابعی مشتق‌پذیر از  $y$ . اگر نقاط  $P, Q, R$  و  $S$  را حذف کنیم، ظاهراً می‌توان پنج تابع به شکل  $y = f(x)$  از رابطه فوق استخراج کرد. حتی اگر بتوان عبارت این تابع‌ها را صریحاً به دست آورد، مشتق‌گیری جداگانه از آنها دشوارتر از این است که از  $F(x, y) = 0$  یک بار به طور ضمنی مشتق‌گیری شود. مشتق‌گیری ضمنی این ویژگی را نیز دارد که نقاط  $P, Q$  و  $S$  را که در آنها مماس قائم وجود دارد بدون تبعیض نمایان می‌کند. حتی در مورد عبارت ساده  $x^2 + y^2 = R^2$ ، دایره شعاع  $R$  حول  $(0, 0)$ ، از مشتق‌گیری ضمنی  $x + y \frac{dy}{dx} = 0$  یا  $x \frac{dx}{dy} + y = 0$  می‌توان ضریب زاویه خط مماس در هر نقطه دایره را به سادگی محاسبه کرد، و این روش طبیعی‌تر از استخراج دو تابع  $y = \pm \sqrt{R^2 - x^2}$  و کارکردن با آنهاست که به هر حال دو نقطه  $(\pm R, 0)$  را پوشش نمی‌دهند.

فرمول مشابه (۲) را می‌توان برای مشتق‌گیری ضمنی از یک عبارت با تعداد متغیر بیشتر نیز به دست آورد. فرض کنید  $F(x_1, \dots, x_n, y) = 0$ . اگر فرض کنیم از این عبارت،  $y$  به صورت تابعی مشتق‌پذیر از  $x_1, \dots, x_n$  استخراج شدنی است،  $y = f(x_1, \dots, x_n)$ ، آنگاه  $F(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n))$  به‌ازای همه مقادیر  $(x_1, \dots, x_n)$  صفر است و اگر نسبت به  $x_j$  مشتق بگیریم حاصل صفر خواهد شد.

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (F(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n))) = 0$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial x_j} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x_j} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x_j} = 0$$

بنابراین وقتی  $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ ، داریم:

$$\frac{\partial y}{\partial x_j} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}}{\frac{\partial F}{\partial y}} \quad (3)$$

که مشابه (۲) است. توجه کنید که در (۲) و (۳)، علاوه بر این فرض که  $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ ، به طور ضمنی این نیز فرض شده است که واقعاً می‌توان  $y$  را به صورت تابعی مشتق‌پذیر از  $x$ ، یا  $(x_1, \dots, x_n)$ ، نوشت. موضوع اصلی بخش حاضر بررسی شرایط صحت این فرض و بحث پیرامون نتایج آن است. در واقع به جای یک رابطه  $F(x_1, \dots, x_n, y) = 0$ ، حالت کلی یک مجموعه رابطه را در نظر می‌گیریم.

فرض کنید  $m$  رابطه زیر میان  $(m+n)$  متغیر  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m$  داده شده‌اند:

$$\begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0 \\ \vdots \\ F_m(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

که در آن هر  $F_i$  دارای مشتق‌های پاره‌ای پیوسته نسبت به کلیه متغیرهای  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m$  است. با توجه به تعداد روابط،  $m$ ، انتظار می‌رود که معمولاً بتوان  $m$  متغیر  $y_1, \dots, y_m$  را برحسب متغیرهای باقیمانده،  $x_1, \dots, x_n$ ، به صورت تابع‌هایی  $y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n)$ ،  $\dots$ ،  $y_m = f_m(x_1, \dots, x_n)$  استخراج کرد. البته این انتظار بعضی اوقات برآورده نمی‌شود. مثلاً در شکل ۱ دیدیم که پنج تابع مختلف  $y = f(x)$  از رابطه داده شده استخراج می‌شود، یا از رابطه  $x^2 + y^2 + 1 = 0$  هیچ تابعی نمی‌توان استخراج کرد چون هیچ نقطه  $(x, y)$  در این رابطه صدق نمی‌کند. به همین ترتیب اگر دستگاه دو معادله سه مجهولی زیر را در نظر بگیریم:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \\ x + y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

این دستگاه جواب ندارد (چرا؟). موضوعی که در اینجا بررسی خواهیم کرد به شرح زیر است. فرض می‌کنیم (۴) دارای دست کم یک جواب باشد، یعنی نقطه‌ای  $(x_1, \dots, x_n) = x = a = (a_1, \dots, a_n)$  و  $(y_1, \dots, y_m) = y = b = (b_1, \dots, b_m)$  وجود داشته باشند که در (۴) صدق کند. در این صورت "قضیه تابع ضمنی" که در زیر خواهد آمد، شرطی کافی ارائه می‌کند برای این که بخشی (احتمالاً

کوچک) از مجموعه جواب (۴) که حول  $(a, b)$  قرار دارد به شکل نمودار تابعی مشتق‌پذیر  $y = f(x)$  باشد. چون نمودار یک تابع مشتق‌پذیر را معمولاً "هموار" تعبیر می‌کنیم، به این مفهوم، و تحت شرط کافی که ارائه خواهد شد، مجموعه جواب در نزدیکی  $(a, b)$  "هموار" تلقی می‌شود.

(۲۸-۱) قضیه تابع ضمنی فرض می‌کنیم  $F_i$  ها در (۴) دارای مشتق‌های پاره‌ای پیوسته نسبت به متغیرهای  $x$  و  $y$  هستند، نقطه  $(x, y) = (a, b)$  در (۴) صدق می‌کند و:

$$\det\left[\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(a, b)\right] \neq 0 \quad (5)$$

در این صورت  $r_1 > 0$  و  $r_2 > 0$  وجود دارند و تابعی مشتق‌پذیر  $f$  از گوی باز شعاع  $r_1$  حول  $a$  به گوی باز شعاع  $r_2$  حول  $b$ ، به طوری که نمودار تابع  $f$  دقیقاً برابر مجموعه نقاط  $(x, y)$  واجد شرط‌های  $|x| < r_1$  و  $|y| < r_2$  است که در (۴) صدق می‌کنند.

در حالت  $m = n = 1$ ، شرط (۵) به این معنی است که  $\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0$  و شکل ۲ حکم قضیه را نمایش می‌دهد. توجه کنید که فقط بخش کوچکی از مجموعه جواب که حول  $(a, b)$  قرار دارد به صورت نمودار یک تابع مشتق‌پذیر  $y = f(x)$  ظاهر می‌شود.

## شکل ۲

اثبات قضیه تابع ضمنی در این درس ارائه نخواهد شد ولی از صورت آن استفاده فراوان خواهد شد. در زیر به بحث پیرامون بعضی کاربردها و حواشی قضیه خواهیم پرداخت.

(۲۸-۲-۱) شرط (۵) یک شرط کافی بسیار قابل استفاده است. بدون آن نیز گاهی حکم قضیه برقرار می‌شود. مثلاً اگر رابطه  $y^3 - x^4 = 0$  را در نظر بگیریم، برای  $F(x, y) = y^3 - x^4$  داریم  $\frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) = 0$  ولی مجموعه جواب برابر نمودار تابع مشتق‌پذیر  $y = x^{\frac{3}{4}}$  است. با این حال برای درک اهمیت (۵) لازم است با بعضی مشکلاتی که ممکن است در صورت عدم برقراری آن رخ دهد آشنا شویم. برای  $m = n = 1$  سه مثال در نظر می‌گیریم. در ابعاد بالا تنوع مشکلات گسترده‌تر است. برای هر یک از سه تابع  $F, G, H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  که به صورت

$$F(x, y) = x^2 + y^2, \quad G(x, y) = x + y^2, \quad H(x, y) = x + y^3$$

تعریف شده‌اند، مجموعهٔ جواب، به ترتیب  $F(x, y) = 0$ ،  $G(x, y) = 0$  و  $H(x, y) = 0$  در شکل‌های ۳الف، ۳ب و ۳ج نمایش داده شده‌اند. در هر مورد نقطه  $(a, b) = (0, 0)$  در رابطه صدق می‌کند. در (الف)  $\frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) = 0$  و مجموعهٔ جواب  $F(x, y) = 0$  از یک تک نقطه‌ای،  $(0, 0)$ ، تشکیل شده است. طبعاً این تک نقطه نمودار تابعی نیست که روی یک گوی باز حول  $a = 0$  تعریف شده باشد. در اینجا انتظار متعارف ما که مجموعهٔ جواب یک خم (یک بعدی) باشد برآورده نمی‌شود. در (ب)،  $\frac{\partial G}{\partial y}(0, 0) = 0$ . مجموعهٔ جواب نمی‌تواند نمودار یک تابع تعریف شده در مجموعهٔ بازی حول  $a = 0$  باشد. در (ج)،  $\frac{\partial H}{\partial y}(0, 0) = 0$ . مجموعهٔ جواب در این مورد نمودار یک تابع از  $\mathbb{R}$  به  $\mathbb{R}$  است، ولیکن این تابع در  $a = 0$  مشتق‌پذیر نیست (ماس قائم).

(۲۸-۲-۲) هموار بودن مجموعهٔ تراز. فرض کنید  $S$  زیرمجموعه‌ای از  $\mathbb{R}$  باشد،  $F : S \rightarrow \mathbb{R}$  تابعی مشتق‌پذیر با مشتق‌های پاره‌ای پیوسته و  $a$  یک نقطهٔ درونی  $S$ . قبلاً اشاره کرده‌ایم که اگر  $\nabla F(a) \neq 0$ ، آنگاه مجموعهٔ تراز گذرا از  $a$  به مفهومی "هموار" است. این مطلب را می‌توانیم اکنون به طور دقیق توضیح دهیم.  $\nabla F(a) = (\frac{\partial F}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n}(a)) \neq 0$  بدین معنی است که دست کم یکی از مشتق‌های پاره‌ای  $F$  در نقطهٔ  $a$  صفر نیست. مثلاً فرض کنید  $\frac{\partial F}{\partial x_n}(a) \neq 0$ . اگر  $F(a) = c$ ، یعنی  $a$  روی مجموعهٔ تراز منسوب به  $c$  قرار داشته باشد، تابع  $G : S \rightarrow \mathbb{R}$  را به صورت  $G(x) = F(x) - c$  تعریف می‌کنیم. مجموعه تراز فوق‌الذکر به مجموعهٔ منسوب به  $0$  برای  $G$  تبدیل می‌شود. برای این مجموعهٔ تراز داریم  $G(x_1, \dots, x_n) = 0$ ، نقطه  $a$  در این رابطه صدق می‌کند و  $\frac{\partial G}{\partial x_n}(a) = \frac{\partial F}{\partial x_n}(a) \neq 0$ . پس طبق قضیهٔ تابع ضمنی، تابعی مشتق‌پذیر  $f$  تعریف شده از یک گوی باز حول  $(a_1, \dots, a_{n-1})$  به بازهٔ بازی حول  $a_n$  در  $\mathbb{R}$  وجود دارد که نمودار آن برابر بخشی از مجموعهٔ تراز است که حول  $a$  قرار دارد. به این مفهوم مجموعه تراز حول  $a$  هموار است.

برای بهره‌گیری کاملتر از قضیهٔ تابع ضمنی، لازم است همانند فرمول‌های (۲) و (۳)، فرمولی در حالت کلی برای مشتق تابع مشتق‌پذیر  $f$  که وجود آن به وسیلهٔ قضیهٔ تابع ضمنی تضمین می‌شود به دست آوریم. برای  $y = f(x)$ ، ماتریس مشتق،  $[\frac{\partial y_i}{\partial x_j}(a)]$  یک ماتریس  $m \times n$  است، ماتریس مشتق‌های پاره‌ای  $F_i$ ها نسبت به  $(x_1, \dots, x_n)$ ،  $[\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(a, b)]$  نیز یک ماتریس  $m \times n$  و ماتریس

مشتق‌های پاره‌ای  $f_i$  ها نسبت به  $(y_1, \dots, y_m)$  یک ماتریس مربعی  $m \times m$  می‌باشد. ضمناً شرط  $\det\left[\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(a, b)\right] \neq 0$  تضمین می‌کند که وارون ماتریس  $\left[\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(a, b)\right]$  وجود دارد.

(۲۸-۳) متمم قضیه تابع ضمنی در شرایط قضیه تابع ضمنی، اگر  $(x, y)$  به اندازه کافی به  $(a, b)$  نزدیک باشد، داریم:

$$\left[\frac{\partial y_i}{\partial x_j}(x)\right] = -\left[\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(x, y)\right]^{-1} \left[\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x, y)\right] \quad (6)$$

توجه کنید که چون مشتق‌های پاره‌ای پیوسته فرض شده‌اند و دترمینان تابعی پیوسته از درایه‌هاست (برحسب ضرب و جمع تعریف شده است)، صفر نبودن دترمینان  $\left[\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(x, y)\right]$  به‌ازای  $(x, y) = (a, b)$  موجب می‌شود که این دترمینان در نزدیکی  $(a, b)$  نیز ناصفر باشد، پس وارون ماتریس  $\left[\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(x, y)\right]$  برای  $(x, y)$  به اندازه کافی نزدیک به  $(a, b)$  وجود خواهد داشت. توجه کنید که در حالت  $m = 1$ ، (۶) به (۳) تبدیل می‌شود و در حالت خاص‌تر  $m = 1$  و  $n = 1$ ، این همان رابطه (۲) است.

اثبات (۶) با استفاده از قاعده زنجیره‌ای سرراست است. برای  $x$  در دامنه تابع  $f$  ذکر شده در قضیه تابع ضمنی،  $F(x, f(x))$  همواره ثابت صفر است، پس

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(F(x, f(x))) = 0$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_j}(F_1(x, f(x))) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_j}(F_m(x, f(x))) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

مشتق‌گیری طرف چپ را به کمک قاعده زنجیره‌ای انجام می‌دهیم:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_1}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^m \frac{\partial F_1}{\partial y_l} \frac{\partial y_l}{\partial x_j} = 0 \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_m}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^m \frac{\partial F_m}{\partial y_l} \frac{\partial y_l}{\partial x_j} = 0 \end{cases}$$

یا

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_j} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

با انتقال ستون سمت چپ به طرف راست و ضرب کردن در وارون ماتریس  $m \times m$  داریم

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_j} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_j} \end{bmatrix}$$

حال اگر برای  $j = 1, \dots, m$  این ستون‌ها را کنار هم قرار دهیم، فرمول (۶) نتیجه می‌شود.

مثال ۱. روابط زیر داده شده‌اند:

$$\begin{cases} x^3 y + 2y^2 z^2 - xz^3 = 0 \\ e^{y+z} - x = 0 \end{cases}$$

نقطه  $(x, y, z) = (1, 0, 0)$  در این روابط صدق می‌کند. انتظار عادی این است که هر یک از دو معادله فوق یک رویه (سطح خمیده) در  $\mathbb{R}^3$  تعریف کند و اشتراک این دو رویه یک خم باشد. می‌دانیم  $(1, 0, 0)$  در این اشتراک قرار دارد. آیا می‌توان برای بخشی از این اشتراک که در نزدیکی  $(1, 0, 0)$  قرار دارد، دو متغیر را به صورت تابعی مشتق‌پذیر از متغیر سوم نوشت؟ در صورت جواب مثبت، می‌خواهیم مشتق دو متغیر را نسبت به متغیر سوم در نقطه  $(1, 0, 0)$  محاسبه کنیم. این مسأله ظاهراً در چارچوب قضیه تابع ضمنی با  $m = 2$  و  $n = 1$  قرار می‌گیرد ولی مشخص نیست کدام دو از متغیرهای  $x, y, z$  می‌توانند نقش متغیرهای  $y_i$  را در قضیه ایفاء کنند. به منظور یافتن متغیرهای مناسب، ماتریس مشتق‌های عبارت‌های بالا را نسبت به متغیرهای  $x, y, z$  تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{bmatrix} 3x^2 y - z^3 & x^3 + 4yz^2 & 4y^2 z - 3xz^2 \\ -1 & e^{y+z} & e^{y+z} \end{bmatrix}_{(1,0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(ستون‌های اول تا سوم، به ترتیب، مشتق نسبت به  $x, y, z$  را نمایش می‌دهند). برای اینکه از قضیه تابع ضمنی استفاده کنیم باید دو متغیر را طوری انتخاب کنیم که ماتریس  $2 \times 2$  متشکل از ستون‌های مربوط به آن دو متغیر دارای دترمینان ناصفر باشد. اگر  $x^3 y + 2y^2 z^2 - xz^3$  را به  $F_1(x, y, z)$  و



$e^{y+z} - x$  را به  $F_2(x, y, z)$  نمایش دهیم، داریم

$$\det \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(x, y)} = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 1$$

$$\det \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(x, z)} = \det \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\det \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(y, z)} = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 1$$

بدین ترتیب، طبق قضیه تابع ضمنی، می‌توان حول  $(1, 0, 0)$ ،  $(x, y)$  را به عنوان تابعی مشتق‌پذیر از  $z$  و نیز  $(y, z)$  را به عنوان تابعی مشتق‌پذیر از  $x$  در نظر گرفت، ولی قضیه تابع ضمنی تضمین نمی‌کند که بتوان  $(x, z)$  را به صورت تابعی مشتق‌پذیر از  $y$  نمایش داد (خواهیم دید که در واقع نمی‌توان حول  $(1, 0, 0)$ ،  $(x, z)$  را تابعی مشتق‌پذیر از  $y$  پنداشت). برای محاسبه مشتق، فرض کنید  $(x, y)$  را تابعی مشتق‌پذیر از  $z$  در نظر گرفته‌ایم. طبق متمام قضیه تابع ضمنی داریم:

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dz} \\ \frac{dy}{dz} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{bmatrix}$$

و در نقطه  $(1, 0, 0)$ :

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dz} \\ \frac{dy}{dz} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{dx}{dz} = 1, \quad \frac{dy}{dz} = 0$$

محاسبه مشتق‌های فوق را می‌توان بدون استفاده از متمام قضیه تابع ضمنی انجام داد به این شرط که متغیرهای مناسب را اختیار کرده باشیم. به عنوان مثال، به فرض اینکه بدانیم می‌توان  $(x, y)$  را تابعی مشتق‌پذیر از  $z$  در نظر گرفت (حول  $(1, 0, 0)$ )،  $(x, y) = f(z)$ ، روابط  $F_1(f(z), z) = 0$  و  $F_2(f(z), z) = 0$  برای  $z$  در نزدیکی  $z = 0$  برقرار است، پس مشتق عبارتهای طرف چپ نسبت به  $z$

صفر خواهد بود. با استفاده از قاعده زنجیره‌ای داریم:

$$\begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial x} \frac{dx}{dz} + \frac{\partial F_1}{\partial y} \frac{dy}{dz} + \frac{\partial F_1}{\partial z} \frac{dz}{dz} = 0 \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} \frac{dx}{dz} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \frac{dy}{dz} + \frac{\partial F_2}{\partial z} \frac{dz}{dz} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (3x^2y - z^3) \frac{dx}{dz} + (x^2 + 4yz^2) \frac{dy}{dz} + (4y^2z - 3xz^2) = 0 \\ -\frac{dx}{dz} + e^{y+z} \frac{dy}{dz} + e^{y+z} = 0 \end{cases}$$

در نقطه  $(1, 0, 0)$  داریم

$$\begin{cases} \frac{dy}{dz} = 0 \\ -\frac{dx}{dz} + \frac{dy}{dz} + 1 = 0 \end{cases}$$

که مجدداً نتیجه می‌دهد  $\frac{dy}{dz} = 0$  و  $\frac{dx}{dz} = 1$

اگر فرض می‌کردیم  $(x, z)$  را می‌توان به عنوان تابعی مشتق‌پذیر از  $y$  حول  $(1, 0, 0)$  در نظر گرفت و محاسبه مشابهی انجام می‌دادیم حاصل می‌شد:

$$\begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial x} \frac{dx}{dy} + \frac{\partial F_1}{\partial y} \frac{dy}{dy} + \frac{\partial F_1}{\partial z} \frac{dz}{dy} = 0 \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} \frac{dx}{dy} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \frac{dy}{dy} + \frac{\partial F_2}{\partial z} \frac{dz}{dy} = 0 \end{cases}$$

و در نقطه  $(1, 0, 0)$ :

$$\begin{cases} 1 = 0 \\ -\frac{dx}{dy} + 1 + \frac{dz}{dy} = 0 \end{cases}$$

این نتیجه متناقض گویای این واقعیت است که نمی‌توان  $(x, z)$  را تابعی مشتق‌پذیر از  $y$  حول  $(1, 0, 0)$  انگاشت. در واقع با توجه به محاسبه پیشین که نتیجه داد  $\frac{dy}{dz} = 0$ ، اگر مجموعه جواب حول  $(1, 0, 0)$  را روی صفحه  $(y, z)$  تصویر کنیم، خمی مشاهده خواهد شد که مماس بر آن محور  $z$  مماس است. بدین ترتیب اگر  $(x, z)$  به صورت تابعی از  $y$  نوشته شود، مشتق  $z$  نسبت به  $y$  تعریف شدنی نیست.

مثال ۲. در ترمودینامیک از رابطه معروف  $PV - kT = 0$  ( $P$ : فشار،  $V$ : حجم،  $T$ : دمای کلویین)

رابطه زیر نوشته می شود:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V = -1 \quad (7)$$

مقصود از  $\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T$  این است که از رابطه  $P, PV - kT = 0$  به عنوان تابعی از  $(V, T)$  در نظر گرفته شده و سپس مشتق آن نسبت به  $V$  با ثابت نگاهداشتن  $T$  محاسبه شده است، به همین ترتیب در مورد دو عبارت دیگر. صحت (7) به رابطه خاص  $PV - kT = 0$  وابسته نیست، بلکه هرگاه  $F(x, y, z) = 0$  داده شده باشد که در آن مشتق‌های پاره‌ای  $F$  نسبت به سه متغیر وجود داشته و پیوسته باشند، در هر نقطه  $(x, y, z)$  که سه مشتق پاره‌ای  $\frac{\partial F}{\partial x}$ ،  $\frac{\partial F}{\partial y}$  و  $\frac{\partial F}{\partial z}$  ناصفر باشند، می توان نوشت:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1 \quad (8)$$

این رابطه را نیز می توان به  $n$  متغیر تعمیم داد. فرض کنید  $F(x_1, \dots, x_n) = 0$ ، مشتق‌های پاره‌ای  $F$  نسبت به  $x_1, \dots, x_n$  همه وجود داشته و پیوسته باشند، و به ازای مقداری از  $(x_1, \dots, x_n)$  داشته باشیم  $\frac{\partial F}{\partial x_j} \neq 0$  برای هر  $j = 1, \dots, n$ . در این صورت طبق قضیه تابع ضمنی، می توان حول این نقطه، هر  $x_j$  را تابع مشتق پذیر از سایر متغیرها فرض کرد و طبق (3) داریم:

$$\frac{\partial x_j}{\partial x_{j+1}} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_{j+1}}}{\frac{\partial F}{\partial x_j}} \quad (9)$$

(برای  $j = n$ ، به جای  $j + 1$  در دو مخرج، بنویسید 1). با ضرب کردن  $n$  رابطه (9) به ازای  $j = 1, \dots, n$  حاصل می شود:

$$\left(\frac{\partial x_1}{\partial x_2}\right) \left(\frac{\partial x_2}{\partial x_3}\right) \dots \left(\frac{\partial x_n}{\partial x_1}\right) = (-1)^n \quad (10)$$

(برای  $n = 2$ ، رابطه  $\frac{dy}{dx} \frac{dx}{dy} = 1$  به دست می آید.) البته در اینجا نیز مقصود از  $\left(\frac{\partial x_1}{\partial x_2}\right)$ ، به طور مبسوط تر،  $\left(\frac{\partial x_1}{\partial x_2}\right)_{x_3, \dots, x_n}$  است، یعنی  $x_1$  به عنوان تابعی مشتق پذیر از  $(x_2, \dots, x_n)$  در نظر گرفته شده و سپس مشتق گیری نسبت به  $x_2$  با ثابت نگاهداشتن  $x_3, \dots, x_n$  منظور شده است.

## قضیه تابع وارون، تعویض مختصات

فرض کنید روابط زیر داده شده‌اند که در آن هر  $f_i$  تابعی دارای مشتق‌های پاره‌ای پیوسته است:

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ y_n = f_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases} \quad (1)$$

در اینجا  $n$  کمیت  $y_1, \dots, y_n$  برحسب کمیت‌های  $x_1, \dots, x_n$  داده شده‌اند. سؤالی طبیعی که تکراراً در ریاضیات و کاربردهای آن مطرح می‌شود این است که در چه شرایطی می‌توان از کمیت‌های  $y_1, \dots, y_n$  به جای  $x_1, \dots, x_n$  به عنوان متغیرهای مسأله خاصی که برحسب  $x_1, \dots, x_n$  بیان شده است استفاده کرد. در واقع می‌توان این سؤال را به عنوان "تعویض متغیر" یا "تعویض مختصات" مطرح کرد. از سویی دیگر می‌توان (۱) را بیان یک تابع  $f = (f_1, \dots, f_n)$  از دامنه مشترک  $f_i$  ها در  $\mathbb{R}^n$  به  $\mathbb{R}^n$  فرض کرد. تابع وارون یا تابع معکوس  $f$ ، تابعی  $g$  با این ویژگی است که هرگاه  $y = f(x)$ ، آنگاه  $x = g(y)$  و بالعکس (شکل ۱). بدین ترتیب  $f$  و  $g$  تناظری یک به یک میان دو زیرمجموعه  $\mathbb{R}^n$  برقرار می‌کنند و می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} x_1 = g_1(y_1, \dots, y_n) \\ \vdots \\ x_n = g_n(y_1, \dots, y_n) \end{cases} \quad (2)$$

شکل ۱

اگر  $g_1, \dots, g_n$  تابع‌های دارای مشتق‌های پاره‌ای پیوسته باشند، جایگزینی  $y_1, \dots, y_n$  به جای  $x_1, \dots, x_n$  را توسط (۲) تعویض مختصات مجاز از  $x$  به  $y$  می‌نامیم. بدین ترتیب اگر

$Z = \varphi(x_1, \dots, x_n)$  یک تابع مشتق‌پذیر از  $x_1, \dots, x_n$  باشد، می‌توان نوشت  $Z = \varphi(g(x_1, \dots, x_n))$

و بنا بر قاعده زنجیره‌ای،  $\varphi \circ g$  کمیت  $Z$  را به عنوان تابعی مشتق‌پذیر از  $y_1, \dots, y_n$  بیان می‌کند.

در مورد تابع‌های یک متغیری،  $n = 1$  دیده‌ایم که شرطی لازم و کافی برای وجود وارون برای تابعی  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ،  $I$  یک بازه باز در  $\mathbb{R}$ ، این است که  $f$  یکنوا (صعودی یا نزولی) باشد. در این وضعیت، اگر  $f$  مشتق‌پذیر با مشتق همواره مثبت (یا همواره منفی) باشد، تابع وارون،  $g$ ، نیز مشتق‌پذیر خواهد شد و از رابطه  $g(f(x)) = x$  بنا بر قاعده زنجیره‌ای نتیجه می‌گیریم که:

$$y = f(x) \quad \text{اگر} \quad g'(x) = \frac{1}{f'(x)} \quad (3)$$

البته شرط صعودی یا نزولی بودن یک تابع در سراسر دامنه به ندرت حاصل می‌شود. از این رو معمولاً به مفهوم "وارون موضعی" متوسل می‌شویم که به صورت زیر است. دامنه تابع داده شده  $f$  را به بازه‌ای کوچکتر محدود می‌کنیم به طوری که در این بازه  $f$  صعودی یا نزولی باشد. در این صورت برای تحدید تابع به این زیربازه وارونی وجود خواهد داشت که یک وارون موضعی  $f$  خوانده می‌شود. در این صورت تحدید  $f$  به یک زیربازه باز از دامنه اولیه، این بازه را به طور یک به یک به یک بازه باز می‌نگارد.

مثالی باز تابع  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ،  $f(x) = \sin x$  است. چنانچه دامنه  $f$  را بازه  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  محدود کنیم،  $f$  در این بازه صعودی است و وارون آن معمولاً به  $\sin^{-1}$  یا  $\text{Arcsin}$  نمایش داده می‌شود. بدین ترتیب  $\sin^{-1}(y)$  برای  $-1 \leq y \leq 1$ ، یگانه  $x$  در بازه  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  است که  $\sin x = y$ . اگر به جای بازه بسته  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  از بازه باز  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  استفاده کنیم، مشتق  $f$  در این بازه اکیداً مثبت است، پس  $\sin^{-1}$  در تصویر این بازه، یعنی  $] -1, 1 [$  مشتق‌پذیر است و

$$\begin{aligned} (\sin^{-1})'(y) &= \frac{1}{\sin' x} = \frac{1}{\cos x} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \end{aligned}$$

(فقط جذر مثبت  $\cos^2 x = (1 - \sin^2 x)$  در نظر گرفته شده است زیرا که  $\cos x$  برای  $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$  مثبت است).

هدف ما اکنون این است که موضوع "وارون موضعی" را به توابع چند متغیری تعمیم دهیم. قضیه زیر تعمیم مورد نظر است:

(۲۹-۱) قضیه تابع وارون دستگاه (۱) را در نظر بگیرید و فرض کنید هر  $f_i$  دارای مشتق‌های پاره‌ای مرتبه اول پیوسته است. فرض کنید نقطه  $a = (a_1, \dots, a_n)$  یک نقطه درونی دامنه  $f = (f_1, \dots, f_n)$  باشد که در آن  $\det(Df(a)) \neq 0$ . در این صورت زیرمجموعه باز  $U$  از دامنه  $f$  حول  $a$  وجود دارد که  $V = f(U)$  یک مجموعه باز است و تحدید  $f$  به  $U$  تناظری یک به یک میان  $U$  و  $V$  ایجاد می‌کند. به علاوه اگر  $g: U \rightarrow V$  وارون موضعی  $f$  باشد، دارای مشتق‌های پاره‌ای مرتبه اول پیوسته است. این قضیه را می‌توان به صورت حالت خاصی از قضیه تابع ضمنی به صورت زیر نتیجه گرفت، ولی شایان ذکر است که معمولاً نخست این قضیه به اثبات می‌رسد و سپس می‌توان قضیه تابع ضمنی را از این قضیه نتیجه گرفت. برای اثبات، (۱) را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{cases} -y_1 + f_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ -y_n + f_n(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

و قرار می‌دهیم  $b = (b_1, \dots, b_n) = f(a)$ . نقطه  $(y, x) = (b, a)$  در (۴) صدق می‌کند. اگر به جای  $-y_i + f_i(x_1, \dots, x_n)$  بنویسیم  $F_i(y_1, \dots, y_n, x_1, \dots, x_n)$ ، نتیجه می‌شود که دترمینان ماتریس  $[\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(b, a)]$  ناصفر است. پس بنا بر قضیه تابع ضمنی می‌توان برای  $(y, x)$  های نزدیک  $(b, a)$  که در (۴) صدق می‌کنند،  $x$  را به صورت تابعی از  $y$  استخراج کرد، یا  $x = g(y)$ ، یا

$$\begin{cases} x_1 = g_1(y_1, \dots, y_n) \\ \vdots \\ x_n = g_n(y_1, \dots, y_n) \end{cases} \quad (5)$$

که در آن  $g_i$  ها تابع‌های دارای مشتق‌های پاره‌ای مرتبه اول پیوسته هستند. بدین ترتیب یک وارون موضعی برای  $f$  حول  $a$  به دست می‌آید.

مضافاً توجه کنید که با مشتق‌گیری از ترکیب  $g(f(x)) = x$  و  $f(g(y)) = y$  روابطی مشابه (۳)

به دست می آیند:

$$Dg(y) \cdot Df(x) = I \quad , \quad Df(x) \cdot Dg(y) = I \quad (6)$$

که در اینجا ماتریس واحد  $n \times n$  یعنی  $\begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$  است. پس ماتریس مشتق‌های پاره‌ای  $y_i$  ها نسبت به  $x_j$  ها، وارون ماتریس مشتق‌های پاره‌ای  $x_i$  ها نسبت به  $y_j$  هاست:

$$\left[ \frac{\partial x_i}{\partial y_j}(y) \right] = \left[ \frac{\partial y_i}{\partial x_j}(x) \right]^{-1} \quad (7)$$

در زیر چند نوع تعویض مختصات معروف را در این چارچوب بررسی می‌کنیم.

مثال ۱ (مختصات قطبی  $(x, y)$ ) می‌نویسیم

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad (8)$$

داریم

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{bmatrix}$$

پس  $\det\left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}\right) = r$ . طبق قضیه تابع وارون اگر  $(r_0, \theta_0)$  طوری باشد که  $r_0 \neq 0$ ، آنگاه (۸) یک تعویض مختصات مجاز از یک مجموعه باز  $U$  حول  $(r_0, \theta_0)$  به مجموعه باز  $V$  حول  $(x_0, y_0) = (r_0 \cos \theta_0, r_0 \sin \theta_0)$  ایجاد می‌کند ولی می‌توان نوشت:

$$(x, y) \in V \text{ و } (r, \theta) \in U \text{ برای } \begin{cases} r = g_1(x, y) \\ \theta = g_2(x, y) \end{cases} \quad (9)$$

در مورد بزرگی اندازه  $U$  و  $V$  توجه کنید که نباید  $r = 0$  را شامل شود زیرا که به ازای  $r = 0$  یک به یک بودن تابع تعریف شده در (۸) نقض می‌شود. همچنین  $U$  نباید شامل دو نقطه  $(r, \theta_1)$  و  $(r, \theta_2)$  باشد که  $\theta_2 - \theta_1 = 2\pi$  است زیرا که مجدداً یک به یک بودن (۸) نقض خواهد شد.

شکل ۲

مثال ۲ (مختصات استوانه‌ای در  $\mathbb{R}^3$ ) این در واقع جایگزینی  $(x, y)$  در مختصات دکارتی فضای

سه‌بعدی  $(x, y, z)$  با مختصات قطبی است، یعنی

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases} \quad (10)$$

سه‌تایی  $(r, \theta, z)$  را مختصات استوانه‌ای نقطه  $(x, y, z)$  می‌نامیم. داریم

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

و  $\det \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = r$ . در اینجا ملاحظاتی مشابه مثال ۱ برقرار است.

مثال ۳ (مختصات کروی) برای نقطه  $(x, y, z)$  در  $\mathbb{R}^3$ ،  $\rho$  را برابر فاصله نقطه از  $z$ ،  $\theta$  را به مفهوم

مختصات قطبی، و  $\varphi$  را زاویه از نیمه بالای محور  $z$  به نیمخط واصل از  $z$  به  $(x, y, z)$  می‌گیریم.

شکل ۳

بدین ترتیب:

$$\begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases} \quad (11)$$

و داریم:

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \varphi, \theta)} = \begin{bmatrix} \sin \varphi \cos \theta & \rho \cos \varphi \cos \theta & -\rho \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & \rho \cos \varphi \sin \theta & \rho \sin \varphi \cos \theta \\ \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & 0 \end{bmatrix}$$

و محاسبه دترمینان این ماتریس نشان می‌دهد که  $\det = \rho^2 \sin \varphi$ . این دترمینان دقیقاً در نقاط خارج

از محور  $z$  ناصفر است، پس حول این نقاط می‌توان یک تعویض مختصات موضعی مجاز به مختصات

کروی انجام داد. در واقع اگر محدودیت‌های  $0 \leq \varphi \leq \pi$ ،  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ، و  $\rho > 0$  را اعمال کنیم،

دستگاه (۱۱) یک تابع یک به یک از  $(\rho, \varphi, \theta)$  به  $(x, y, z)$  تعریف می‌کند. اگر مشتق‌پذیری تابع

وارون مطرح نباشد می‌توان از این تعویض مختصات خارج از  $z$  استفاده کرد.



## بهینه‌سازی (۱)

مسائل بهینه‌سازی چند متغیری بدین صورت ارائه می‌شوند که تابعی  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ ،  $S$  زیرمجموعه‌ای از  $\mathbb{R}^n$ ، داده شده است، و هدف یافتن ماکسیمم یا مینیمم مطلق  $f$  در مجموعه  $S$  است. روش بخش ۲۷ تا حدودی جوابگوی این مسأله است به این مفهوم که اگر ماکسیمم یا مینیمم مورد نظر در یک نقطه درونی مجموعه  $S$  ظاهر شود و اگر  $f$  در این نقطه مشتق‌پذیر باشد، این نقطه یک نقطه بحرانی تابع خواهد بود. روشن است که برای حل کامل مسأله، علاوه بر در نظر گرفتن نقاط بحرانی، باید نقاط نوع زیر نیز در نظر گرفته شوند تا با مقایسه مقدار  $f$  در این نقاط و نقاط بحرانی جواب نهایی مسأله معلوم گردد. این نقاط عبارتند از:

(۱) نقاط مرزی ناحیه تعریف تابع.

(۲) نقاط تکین، یعنی نقاطی که در آن  $f$  مشتق‌پذیر نیست.

اگر  $S$  یک مجموعه بسته (شامل کلیه نقاط مرزی) و کراندار باشد، می‌دانیم هر تابع پیوسته  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  روی  $S$  ماکسیمم و مینیمم مطلق اتخاذ می‌کند، بنابراین اگر  $S$  بسته و کراندار و  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  پیوسته باشد، مقایسه نتایج به دست آمده از نقاط بحرانی، نقاط مرزی و نقاط تکین قطعاً جواب مورد نظر را به دست خواهد داد. در حالتی که مجموعه  $S$  بی‌کران باشد، یا بعضی نقاط مرزی خود را شامل نشود، امکان دارد که ماکسیمم یا مینیمم در  $S$  موجود نباشد. برای این‌گونه مجموعه‌ها باید رفتار تابع  $f(x)$  را وقتی  $x$  به یک نقطه مرزی خارج  $S$  نزدیک می‌شود و نیز وقتی  $|x| \rightarrow \infty$  (در داخل مجموعه  $S$ ، وقتی  $S$  بی‌کران است) جداگانه بررسی کرد. امکان دارد در این موارد اصلاً ماکسیمم یا مینیمم وجود نداشته باشد. در زیر به ذکر دو مثال می‌پردازیم.

مثال ۱ ماکسیمم و مینیمم تابع  $f(x, y) = x^2 + y^2 + x$  را در ناحیه  $x^2 + y^2 \leq 1$  به دست آورید.

حل ناحیه داده شده گوی بسته شعاع ۱ حول مبدأ در  $\mathbb{R}^2$  است که بسته و کراندار می‌باشد. تابع داده شده به ازای هر  $(x, y)$  مشتق پذیر است، پس نقطه تکین وجود ندارد. کافی است نقاط بحرانی و نقاط مرزی را بررسی و مقایسه کنیم. برای نقاط بحرانی:

$$\nabla f(x, y) = (2x + 1, 2y) = (0, 0)$$

نتیجه می‌دهد  $(-\frac{1}{2}, 0)$  تنها نقطه بحرانی است، و  $f(-\frac{1}{2}, 0) = -\frac{1}{4}$ . نقاط مرزی دقیقاً آن  $(x, y)$  ها هستند که  $x^2 + y^2 = 1$ ، پس در یک نقطه مرزی  $f(x, y) = 1 + x$  و از آنجا که برای نقاط مرزی  $-1 \leq x \leq 1$ ، نتیجه می‌گیریم که ماکسیمم  $f$  روی مرز در نقطه  $(1, 0)$  و مینیمم آن در نقطه  $(-1, 0)$  به دست می‌آید. داریم  $f(1, 0) = 2$  و  $f(-1, 0) = 0$ . از مقایسه سه مقدار به دست آمده نتیجه می‌گیریم که ماکسیمم تابع برابر ۲ است و در نقطه مرزی  $(1, 0)$  ظاهر می‌شود، در حالی که مینیمم آن،  $-\frac{1}{4}$ ، در نقطه بحرانی درونی  $(-\frac{1}{2}, 0)$  حاصل می‌شود.

مثال ۲ ماکسیمم و مینیمم تابع  $f(x, y) = \frac{|xy|}{x^2 + y^2 + 1}$  را در  $\mathbb{R}^2$  به دست آورید.

حل وجود قدر مطلق نشان می‌دهد تابع ممکن است وقتی  $xy = 0$  مشتق پذیر نباشد. در هر حال به ازای  $xy = 0$ ، یعنی روی اجتماع محوره‌های  $x, y$ ، مقدار تابع صفر است که قطعاً مینیمم تابع می‌باشد زیرا که به ازای  $xy \neq 0$  مقدار تابع مثبت است. در خارج اجتماع محورها، کافی است مقدار تابع به ازای  $x > 0, y > 0$  بررسی شود زیرا که به سبب قدر مطلق، تقارن نسبت به دو محور دیگر وجود دارد. در ربع اول داریم

$$\nabla f(x, y) = \left( \frac{y(y^2 + 1 - x^2)}{(x^2 + y^2 + 1)^2}, \frac{x(x^2 + 1 - y^2)}{(x^2 + y^2 + 1)^2} \right)$$

برای  $x > 0$  و  $y > 0$ ،  $\nabla f(x, y) = 0$  جواب ندارد. زیرا که خم‌های  $x^2 + 1 = y^2$  و  $y^2 + 1 = x^2$  نقطه مشترک ندارند، پس نقطه بحرانی وجود ندارد. از سویی دیگر برای  $x \neq 0$  و  $y \neq 0$ :

$$\frac{|xy|}{x^2 + y^2 + 1} = \frac{\frac{|xy|}{x^2 + y^2}}{1 + \frac{1}{x^2 + y^2}} < \frac{1}{2}$$

و در امتداد خط  $y = x$  مقدار تابع به  $\frac{1}{4}$  میل می‌کند وقتی  $x \rightarrow +\infty$ . نتیجه این که تابع ماکسیمم ندارد.

در مثال اول، مجموعه مرزی، دایره  $x^2 + y^2 = 1$  بود و تابع مورد نظر  $f(x, y) = x^2 + y^2 + x$  روی این مجموعه به شکل ساده  $f(x, y) = 1 + x$  خلاصه می‌شد. در حالت کلی، یافتن ماکسیمم یا مینیمم روی مرز یک مجموعه می‌تواند دشوار باشد. مجموعه‌های مرزی که در عمل ظاهر می‌شوند معمولاً از یک یا چند قطعه هموار تشکیل شده‌اند. "روش لاگرانژ" که در زیر می‌آید حربه مؤثری برای یافتن نقاط ماکسیمم یا مینیمم موضعی تحدید یک تابع به یک مجموعه هموار (مثلاً مجموعه تراز غیر بحرانی) است. به طور خاص وضعیت زیر را در نظر بگیرید. فرض کنید  $S$  یک زیرمجموعه باز  $\mathbb{R}^n$  است،  $g : U \rightarrow \mathbb{R}$  تابعی با مشتق‌های پاره‌ای مرتبه اول پیوسته، و  $M$  یک مجموعه تراز تابع  $g$ ، مثلاً

$$M = \{x \in U \mid g(x) = c\}$$

در مثال‌های مورد نظر ما گاهی  $M$  مرز یک ناحیه است (مثلاً مرز ناحیه‌ای که در آن  $g(x) \geq c$  یا ناحیه‌ای که در آن  $g(x) \leq c$ ). فرض کنید تابع  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  نیز داده شده است که مشتق‌های پاره‌ای مرتبه اول پیوسته دارد. می‌خواهیم نقاط ماکسیمم و مینیمم موضعی تحدید  $f$  به  $M$  را شناسایی کنیم.

(۱۶-۱) قضیه لاگرانژ فرض کنید  $a$  یک نقطه ماکسیمم یا مینیمم موضعی تحدید  $f$  به  $M$  باشد و  $a$  یک نقطه بحرانی برای  $g$  نباشد، در این صورت  $\nabla f(a)$  در نقطه  $a$  بر  $M$  عمود است: بدین ترتیب، چون  $a$  برای  $g$  بحرانی نیست، یعنی  $\nabla g(a) \neq 0$ ، عددی حقیقی  $\lambda$  وجود دارد که:

$$\nabla f(a) = \lambda \nabla g(a)$$

توجه کنید که  $\nabla g(a) \neq 0$  نشان می‌دهد که مجموعه تراز  $M$  حول  $a$  هموار است، پس عمود بودن  $\nabla f(a)$  بر آن معنی دارد، این در واقع به معنی عمود بودن بر کلیه بردارهای مماس بر  $M$  در نقطه  $a$  است. فرض کنید  $v$  یک چنین بردار باشد. خمی هموار  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  در نظر می‌گیریم که تصویر آن به تمامی روی  $M$  قرار گیرد،  $\gamma(t) \in M$  برای هر  $t \in I$  و  $\gamma(t_0) = a$  و  $\gamma'(t_0) = v$ ، چون  $a$  یک نقطه مینیمم موضعی (یا ماکسیمم موضعی) برای تحدید  $f$  به  $M$  است  $f(\gamma(t))$  به ازای  $t = t_0$  دارای

## شکل ۱

مینیم موضعی (یا ماکسیم موضعی) است، پس  $\frac{d}{dt}((f \circ \gamma)(t))|_{t=t_0} = 0$ . طبق قاعده زنجیره‌ای:

$$0 = \frac{d}{dt}((f \circ \gamma)(t))|_{t=t_0} = \nabla f(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0) = \nabla f(a) \cdot v$$

یعنی  $\nabla f(a) \perp v$  و قضیه لاگرانژ به اثبات می‌رسد.

قبل از ارائه مثال و تکمیل کردن صورت قضیه لاگرانژ که بعداً خواهد آمد، دو بحث شهودی در تأیید قضیه لاگرانژ بیان می‌کنیم:

(۱۶-۲) بحث شهودی ۱ محدود ساختن دامنه  $f$  به  $M$  و جستجو برای نقاط ماکسیم و مینیم آن را می‌توان به شکل یک آزمایش ذهنی بدین صورت مطرح کرد. موجوداتی را تصور می‌کنیم که چسبیده به  $M$  زندگی می‌کنند و از جهان خارج (یعنی  $\mathbb{R}^n$ ) هیچ‌گونه ادراکی ندارند. برای این موجودات تابع  $f$  فقط روی  $M$  تعریف شده است. چون نقطه  $a$  یک نقطه غیربحرانی  $g$  است،  $M$  حول  $a$  از هموار بودن کافی برخوردار است و این موجودات ناحیه حول  $a$  را به شکل  $\mathbb{R}^{n-1}$  تجسم می‌کنند. اگر  $a$  یک نقطه ماکسیم یا مینیم موضعی برای تحدید  $f$  به  $M$  باشد، برای این موجودات  $a$  یک نقطه بحرانی  $f$  (محدود به جهان آنان) است و بنابراین باید "گرادیان  $f$ " (به مفهوم جهان  $M$ ) از نظر این موجودات صفر شود. ولی "گرادیان  $f$ " از دیدگاه این موجودات با "گرادیان  $f$ " به مفهوم ما چه رابطه‌ای دارد؟ طبیعی به نظر می‌رسد که فرض کنیم گرادیان  $f$  برای موجودات محدود به  $M$ ، "سایه" یا تصویر قائم گرادیان  $f$  عادی روی  $M$  است. در این صورت صفر شدن گرادیان برای این موجودات معادل با عمود بودن آن بر  $M$  از نظر ما است.

(۱۶-۳) بحث شهودی ۲ یک مورد خاص را در نظر می‌گیریم که وضعیت کلی را به طرزی بارز نشان می‌دهد. این مثال را می‌توان در هر بعد ارائه کرد ولی برای سهولت تجسم آن را در  $\mathbb{R}^2$  یا  $\mathbb{R}^3$  تصور کنید. شکل ۲ مربوط  $\mathbb{R}^2$  است. فرض کنید هدف یافتن مینیمم (مجذور) فاصله نقطه  $p = (p_1, \dots, p_n)$  به مجموعه تراز هموار  $M = g^c$  است که  $p$  خارج آن قرار دارد. برای این کار بالنی کروی به مرکز  $p$  تجسم می‌کنیم که تدریجاً شعاع آن افزایش می‌یابد. اولین برخورد سطح این بالن

با  $M$  در نقطه حداقل فاصله  $M$  از  $p$  صورت می‌گیرد. در این نقطه سطح بالن و  $M$  بر هم مماس می‌شوند پس قائم‌های این دو در یک راستا قرار می‌گیرند. جهت قائم بر  $M$  در نقطه تماس  $a$  به وسیله  $\nabla g(a)$  مشخص می‌شود. تابعی که یافتن مینیمم آن مطرح است، مجدور فاصله از  $p$ ، یعنی  $f(x) = \sum_{i=1}^n (x_i - p_i)^2$  می‌باشد که گرادیان آن  $\nabla f(x) = 2(x_1 - p_1, \dots, x_n - p_n)$  در امتداد شعاع حامل از  $p$  به نقطه  $x$  بر سطح بالن عمود است (در واقع سطح بالن در لحظات مختلف مجموعه‌های تراز گوناگون  $f$  است). بدین ترتیب همراستا بودن  $\nabla f(a)$  و  $\nabla g(a)$  توجیه می‌شود.

## شکل ۲

اکنون مثال‌هایی از نحوه به کار گرفتن قضیه لاگرانژ در حل مسایل بهینه‌سازی ارائه می‌کنیم. در هر مسأله نقاط  $a$  را که در رابطه  $\nabla f(a) = \lambda \nabla g(a)$  صدق می‌کنند پیدا کرده و با مقایسه مقدار  $f$  در این نقاط به جواب مسأله می‌رسیم. توجه کنید که اگر مسأله در  $\mathbb{R}^n$  باشد، رابطه  $\nabla f(a) = \lambda \nabla g(a)$  در واقع  $n$  معادله  $(n+1)$ -جهولی به دست می‌دهد ( $\lambda$  نیز نامعلوم است) ولی رابطه  $g(x) = c$  (مجموعه تراز) که نقطه مورد نظر روی آن قرار دارد) نیز برقرار است که با انضمام آن می‌توان امید داشت از  $(n+1)$  معادله  $(n+1)$  جهولی به جواب برسیم.

مثال ۱ نزدیکترین و دورترین نقاط بیضی وار  $1 = \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{3}$  را از نقطه  $(-1, 0, 0)$  پیدا کنید. مجدور فاصله، یعنی  $f(x, y, z) = (x+1)^2 + y^2 + z^2$  را در نظر می‌گیریم. هدف یافتن مینیمم و ماکسیمم این تابع برای  $(x, y, z)$  محدود به سطح بیضی وار است. اگر قرار دهیم  $g(x, y, z) = \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{3}$ ، هدف یافتن ماکسیمم و مینیمم تحدید  $f$  به مجموعه تراز  $g(x, y, z) = 1$  است. داریم  $\nabla g(x, y, z) = (\frac{x}{2}, 2y, \frac{2}{3}z)$  پس در هیچ نقطه مجموعه تراز  $g(x, y, z) = 1$  صفر نمی‌شود و روش لاگرانژ باید جواب دهد. رابطه  $\nabla f = \lambda \nabla g$  به صورت زیر در می‌آید:

$$\begin{cases} 2(x+1) = \lambda(\frac{x}{2}) \\ 2y = \lambda(2y) \\ 2z = \lambda(\frac{2}{3}z) \end{cases}$$

رابطه دوم نشان می‌دهد  $y = 0$  یا  $\lambda = 1$  که این دو حالت را جداگانه بررسی می‌کنیم.

حالت  $y = 0$  از معادله سوم نتیجه می شود که  $z = 0$  یا  $\lambda = 2$ . اگر  $z = 0$ ، علاوه بر  $y = 0$ ، داریم  $x = \pm 2$  و دو نقطه  $(\pm 2, 0, 0)$  برای بررسی مطرح می شوند. اگر  $\lambda = 2$ ، معادله اول می دهد  $2x + 2 = x$  یا  $x = -2$  که در نتیجه  $y = z = 0$  و همان نقطه  $(-2, 0, 0)$  به دست می آید.

حالت  $\lambda = 1$  در این صورت معادله سوم نتیجه می دهد  $z = 0$  و معادله اول  $2x + 2 = \frac{x}{3}$  منجر می شود به  $x = -\frac{4}{3}$ . چون  $z = 0$  داریم  $y = \pm \frac{\sqrt{5}}{3}$ . در نتیجه دو نقطه  $(-\frac{4}{3}, \pm \frac{\sqrt{5}}{3}, 0)$  مطرح می گردند.

در مجموع به چهار نقطه  $(\pm 2, 0, 0)$  و  $(-\frac{4}{3}, \pm \frac{\sqrt{5}}{3}, 0)$  دست یافته ایم که با مقایسه مقدار  $f$  در این چهار نقطه باید جواب مورد نظر به دست آید:

$$f(2, 0, 0) = 9, \quad f(-2, 0, 0) = 1, \quad f(-\frac{4}{3}, \pm \frac{\sqrt{5}}{3}, 0) = \frac{2}{3}$$

نتیجه این که  $(2, 0, 0)$  دورترین نقطه بیضی وار، و  $(-\frac{4}{3}, \pm \frac{\sqrt{5}}{3}, 0)$  نزدیکترین نقطه های بیضی وار به نقطه  $(-1, 0, 0)$  هستند.

مثال ۲ فرض کنید  $K, A, B, C, D, \alpha, \beta, \gamma$  داده های ثابت مثبت هستند. می خواهیم ماکسیمم تابع  $f(x, y, z) = Kx^\alpha y^\beta z^\gamma$  را مشروط به این که  $Ax + By + Cz = D$ ،  $x \geq 0$ ،  $y \geq 0$  و  $z \geq 0$  بررسی کنیم. این نوع بهینه سازی در بعضی مسایل اقتصادی مطرح می شود. در این تعبیر  $x$ ،  $y$  و  $z$  عوامل تولید هستند (مثلاً نیروی کار، ماده اولیه و سرمایه گذاری در ماشین آلات) و  $A$ ،  $B$  و  $C$  هزینه واحد این عوامل.  $D$  مقدار ثابتی است که مجموع هزینه گذاری را نمایش می دهد.  $f$  تابع تولید برحسب عوامل  $x, y, z$  است. هدف، انتخاب نسبت مناسب از  $x, y$  و  $z$  با قید  $Ax + By + Cz = D$  است به نحوی که میزان تولید حداکثر ممکن باشد. از نظر هندسی باید ماکسیمم تابع  $f(x, y, z) = Kx^\alpha y^\beta z^\gamma$  روی مثلث واقع بر صفحه  $Ax + By + Cz = D$  محصور در ثمن اول ( $x \geq 0$ ،  $y \geq 0$ ،  $z \geq 0$ ) بررسی شود. توجه کنید که روی اضلاع مثلث، یکی از سه متغیر  $x, y$  یا  $z$  صفر می شود و در نتیجه مقدار  $f$  صفر می شود، بنابراین جواب باید یک نقطه درونی مثلث باشد.

شکل ۳

ضمناً با نوشتن  $g(x, y, z) = Ax + By + Cz$  می‌بینیم که  $\nabla g(x, y, z) = (A, B, C)$  همه‌جا ناصفر است و روش لاگرانژ باید جواب مورد نظر را به دست دهد. رابطه  $\nabla f = \lambda \nabla g$  به صورت مؤلفه به مؤلفه هست:

$$\begin{cases} \alpha K x^{\alpha-1} y^{\beta} z^{\gamma} = \lambda A \\ \beta K x^{\alpha} y^{\beta-1} z^{\gamma} = \lambda B \\ \gamma K x^{\alpha} y^{\beta} z^{\gamma-1} = \lambda C \end{cases}$$

چون برای جواب مطلوب  $x \neq 0$ ،  $y \neq 0$  و  $z \neq 0$  می‌توانیم سه رابطه را به ترتیب در  $x$ ،  $y$  و  $z$  ضرب کرده نتیجه بگیریم:

$$\begin{cases} \alpha f(x, y, z) = \lambda Ax \\ \beta f(x, y, z) = \lambda By \\ \gamma f(x, y, z) = \lambda Cz \end{cases}$$

بنابراین

$$\frac{A}{\alpha}x = \frac{B}{\beta}y = \frac{C}{\gamma}z$$

که با جایگزین در  $Ax + By + Cz = D$  به جواب منحصر به فردی می‌رسد. همان طور که بحث شد این جواب یکتا باید ماکسیمم باشد. رابطه بالا نشان می‌دهد سهم مناسب  $x$ ،  $y$  و  $z$  با ماکسیمم کردن تابع تولید نسبت  $(x : y : z) = (\frac{\alpha}{A} : \frac{\beta}{B} : \frac{\gamma}{C})$  است.

بالاخره مثال ساده‌ی زیر نشان می‌دهد که رعایت بررسی جداگانه نقاط احتمالاً ناهموار، یعنی نقاطی که در آن  $\nabla g$  صفر می‌شود کاملاً ضروری است.

مثال ۳ نزدیکترین نقطه  $x^3 = y^2 = 0$  به نقطه  $(-1, 0)$  را پیدا کنید.

مجدور فاصله  $(-1, 0)$  از نقطه  $(x, y)$  هست  $f(x, y) = (x+1)^2 + y^2$ . برای  $g(x, y) = y^2 - x^3$ ،

رابطه  $\nabla f = \lambda \nabla g$  به صورت زیر در می‌آید:

$$\begin{cases} 2(x+1) = \lambda(-3x^2) \\ 2y = \lambda(2y) \end{cases}$$

جواب بدیهی مسأله، نقطه  $(0, 0)$  است که در رابطه اول بالا صدق نمی‌کند. توجه کنید که  $\nabla g(0, 0) = \underline{0}$  و خم  $y^2 - x^3 = 0$  در  $(0, 0)$  هموار نیست.

شکل ۴



# انتگرال چندگانه

یکی از دو رکن اصلی حساب دیفرانسیل و انتگرال، فرایند انتگرال گیری است. یک تعبیر متداول از انتگرال  $\int_a^b f$  وقتی  $f$  تابعی نامنفی و تعریف شده روی  $[a, b]$  باشد، اندازه مساحت زیر نمودار تا محور  $x$  بین  $a$  و  $b$  است. در اینجا می‌خواهیم مفهوم انتگرال تابع‌های تعریف شده روی ناحیه‌های واقع در  $\mathbb{R}^n$  را بررسی کنیم. یک تفاوت فوری که به ذهن می‌رسد تنوع شکل ناحیه‌ها در حالت دو بعدی و ابعاد بالاتر است. در حالت یک بعدی دامنه تعریف تابع معمولاً یک بازه یا اجتماع چند بازه در نظر گرفته می‌شود و این در تقریباً همه موارد کفاف نیاز می‌کند. در حالت دو بعدی انواع ناحیه‌های محصور به پاره خط یا قطعه خم را می‌توان تصور کرد که به طور طبیعی در مسائل گوناگون ظاهر می‌شوند. مثلاً در شکل ۱، ناحیه داده شده ممکن است یک صفحه نازک با چگالی متغیر  $\rho(x, y)$  باشد. برای محاسبه جرم این صفحه باید از  $\rho(x, y)$  در سراسر ناحیه "انتگرال گیری" شود. برای مطرح ساختن مفهوم انتگرال در بعد ۲ به بالا، نخست مفهوم انتگرال را روی "مستطیل" که تعمیم طبیعی بازه است مطرح می‌کنیم، سپس به ناحیه‌های پیچیده‌تر می‌پردازیم.

## شکل ۱

فرض کنید  $2n$  عدد حقیقی  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$  داده شده‌اند که  $a_1 \leq b_1, \dots, a_n \leq b_n$ . مجموعه زیر یک مستطیل بسته در  $\mathbb{R}^n$  خوانده می‌شود:

$$R = \{(x_1, \dots, x_n) \mid a_1 \leq x_1 \leq b_1, \dots, a_n \leq x_n \leq b_n\}$$

اصطلاح "بسته" ارجاع به علامت  $\leq$  است. وقتی به جای  $\leq$ ، نماد  $<$  به کار برده شود، یک "مستطیل باز" تعریف می‌شود و در صورت اختلاط  $<$  و  $\leq$ ، انواع مستطیل‌ها که شامل بخشی از مرز خود می‌شوند به دست می‌آیند. مقصود از یک افراز  $R$ ، تجزیه  $R$  به زیرمستطیل‌هایی از همین نوع به شکل دقیق زیر

است. برای هر مؤلفه، مثلاً مؤلفه  $i$ -ام، بازه  $[a_i, b_i]$  را به صورت زیر افراز می‌کنیم:

$$a_i = a_{i_0} \leq a_{i_1} \leq \dots \leq a_{i_{p_i}} = b_i$$

$p_i$  تعداد زیربازه‌هایی است که  $[a_i, b_i]$  به آن تجزیه شده است. اگر این افراز برای هر مؤلفه انجام گیرد، تجزیه‌ای که برای  $R$  حاصل می‌شود مرکب از زیرمستطیل‌های به شکل زیر است:

$$a_{1,j_1} \leq x_1 \leq a_{1,j_1+1}, \dots, a_{n,j_n} \leq x_n \leq a_{n,j_n+1}$$

در شکل ۲، یک نمونه از زیرمستطیل‌های تجزیه هاشور زده شده است.

### شکل ۲

حجم  $n$ -بعدی مستطیل  $R$  را برابر حاصل ضرب طول اضلاع، یعنی  $(b_1 - a_1) \times \dots \times (b_n - a_n)$  تعریف می‌کنیم. بدین ترتیب حجم  $R$  برابر مجموع حجم‌های زیرمستطیل‌های پدید آمده در افراز است. در حالت  $n = 1$ ، حجم  $1$ -بعدی همان طول، در حالت  $n = 2$ ، حجم دو بعدی برابر مساحت، و برای  $n = 3$ ، همان مفهوم حجم معمولی است.

حال فرض کنید تابعی کراندار  $f: R \rightarrow \mathbb{R}$  داده شده است، می‌خواهیم مفهومی  $\int_R f$  تعریف کنیم که موارد استفاده‌ای مشابه انتگرال روی یک بازه  $[a, b]$  را داشته باشد. بدین ترتیب در حالت دو بعدی،  $n = 2$ ، اگر  $f(x) \geq 0$  برای هر  $x$  در  $R$ ، آنگاه  $\int_R f$  باید بیانگر "حجم" زیر نمودار  $f: R \rightarrow \mathbb{R}$  باشد. همچنین برای  $n = 2$  و  $n = 3$ ، اگر  $f$  در هر نقطه  $R$ ، چگالی منسوب به آن نقطه را بیان کند،  $\int_R f$  باید جرم کل  $R$  باشد. به این منظور به روشی مشابه حالت یک بعدی عمل می‌کنیم. فرض کنید افرازی از  $R$  داده شده باشد و زیرمستطیل‌های افراز را  $R_1, \dots, R_p$  نامگذاری کنید. در هر  $R_i$ ، نقطه‌ای  $Q_i$  به دلخواه انتخاب کنید و مجموع زیر را در نظر بگیرید:

$$\sum_{i=1}^p \text{vol}(R_i) \cdot f(Q_i) \quad (1)$$

که در اینجا مقصود از  $\text{vol}(R_i)$  حجم ( $n$ -بعدی)  $R_i$  است. مجموع‌های به شکل (۱) را مجموع ریمان می‌نامند. در حالت دو بعدی مجموع فوق تقریب معقولی برای حجم زیر نمودار  $f$  است چه

$vol(R_i) \cdot f(Q_i)$  در واقع حاصل ضرب مساحت قاعده مستطیل  $R_i$  در ارتفاع نمودار بالاسر  $Q_i$  است، یعنی حجم یک مکعب مستطیل. مجموع حجم‌های این مکعب مستطیل‌ها تقریبی است برای حجم زیر نمودار. به تقلید از حالت یک بعدی می‌خواهیم "حد" مجموع‌های ریمان را، وقتی "ضخامت افراز" به صفر میل می‌کند، حجم زیر نمودار یا انتگرال تابع  $f$  بنامیم. ضخامت افراز را می‌توان مثلاً به شکل  $\max_{i,j}(a_{i,j+1} - a_{i,j})$  تعریف کرد. تعریف دقیق انتگرال به صورت زیر است:

(۳۲-۱) تعریف تابع کراندار  $f$  روی مستطیل بسته  $R$  تعریف شده است. اگر عددی  $I$  وجود داشته باشد با این ویژگی که به ازای هر  $\varepsilon > 0$ ،  $\delta > 0$  وجود داشته باشد که هرگاه ضخامت یک افراز  $R$  از  $\delta$  کوچکتر باشد، آنگاه برای مجموع (۱) داشته باشیم:

$$| \int_R f - I | < \varepsilon$$

در آن صورت  $f$  را انتگرال پذیر روی  $R$  خوانده و  $I$  را، که معمولاً به  $\int_R f$  نمایش می‌دهیم، انتگرال  $f$  روی  $R$  می‌نامیم.

خواص زیر به روش‌هایی کاملاً مشابه حالت یک متغیری قابل اثبات هستند.

(۳۲-۲) خواص ابتدایی انتگرال روی مستطیل

(۳۲-۲-۱) (خطی بودن) اگر  $f, g$  روی  $R$  انتگرال پذیر باشند و  $c$  یک عدد حقیقی باشد، آنگاه  $f + g$  و  $cf$  روی  $R$  انتگرال پذیرند و

$$\int_R (f + g) = \int_R f + \int_R g \quad (۲)$$

$$\int_R (cf) = c \int_R f \quad (۳)$$

(۳۲-۲-۲) اگر  $f$  روی  $R$  انتگرال پذیر باشد و  $f(x) \geq 0$  برای هر  $x$  در  $R$ ، آنگاه:

$$\int_R f \geq 0$$

(۳-۲-۳۲) اگر  $f$  تابع ثابت  $f(x) = k$  روی  $R$  باشد،  $f$  انتگرال پذیر است و:

$$\int_R f = k \cdot \text{vol}(R) \quad (۴)$$

بدین ترتیب اگر از تابع ثابت با مقدار ۱ روی  $R$  انتگرال بگیریم عدد حاصل برابر حجم  $n$ -بعدی  $R$  است.

(۳-۲-۴) اگر مستطیل  $R$  برابر اجتماع دو زیرمستطیل  $R'$  و  $R''$  باشد که فقط در مرز اشتراک دارند و  $f$  روی هر یک از  $R'$  و  $R''$  انتگرال پذیر باشد، آنگاه  $f$  روی  $R$  انتگرال پذیر است و

$$\int_R f = \int_{R'} f + \int_{R''} f \quad (۵)$$

### شکل ۳

(۳-۳۲) مثال مهم: تابع پیوسته. فرض کنید  $f: R \rightarrow \mathbb{R}$  یک تابع پیوسته باشد. می دانیم هر تابع پیوسته روی مجموعه بسته و کراندار، کراندار است (در واقع حتی، ماکسیمم و مینیمم اتخاذ می کند). طبق قضیه‌ای که اثبات آن در اینجا نخواهد آمد، هر تابع پیوسته روی یک مجموعه بسته و کراندار  $\mathbb{R}^n$ ، در واقع به طور یکنواخت پیوسته است، بدین معنی که هرگاه  $\varepsilon > 0$  داده شده باشد،  $\delta > 0$  وجود دارد که برای هر دو عضو  $x, x'$  از دامنه تابع که  $|x - x'| < \delta$ ، داریم  $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ . تفاوت این امر با پیوستگی عادی در سراسر دامنه این است که در حالت عادی یک  $\delta$  ی واحد ممکن است در سراسر دامنه برای  $\varepsilon$  داده شده کار نکنند، بلکه به ازای هر  $x$  دامنه، باید  $\delta > 0$  مناسب آن نقطه یافت شود که هرگاه  $|x - x'| < \delta$ ، آنگاه  $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ . به کمک مفهوم پیوستگی یکنواخت می توان نشان داد که هر تابع پیوسته روی مستطیل بسته انتگرال پذیر است. در واقع انتگرال پذیری محدود به تابع‌های پیوسته نیست. در حالت یک متغیری دیده‌ایم که تعدادی متناهی "جهش" در مقدار تابع اثری بر انتگرال پذیری ندارد. قضیه‌ای قاطع در این زمینه وجود دارد که طبق آن شرطی لازم و کافی برای انتگرال پذیری تابع کراندار  $f$  روی یک مستطیل  $n$ -بعدی این است که نقاط

ناپیوستگی  $f$  مجموعاً "حجم  $n$ -بعدی ناچیز" داشته باشد. تعریف دقیق چنین است: زیرمجموعه  $S$  از  $\mathbb{R}^n$  را دارای اندازه صفر  $n$ -بعدی می‌نامیم در صورتی که برای هر  $\varepsilon > 0$ ، دنباله‌ای  $R_1, R_2, \dots$  از مستطیل‌های  $n$ -بعدی وجود داشته باشد که  $S \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i$  را پوشانند، یعنی  $\sum_{i=1}^{\infty} \text{vol}(R_i) < \varepsilon$ .

مثال ۱ هر مجموعه متناهی در  $\mathbb{R}^n$  اندازه  $n$ -بعدی صفر دارد. قرار دهید  $S = \{p_1, \dots, p_k\}$  به مرکز  $p_i$ ، مکعب  $n$ -بعدی (یعنی مستطیل  $n$ -بعدی با اضلاع برابر) به ضلع کوچکتر از  $\sqrt[n]{\frac{\varepsilon}{k}}$  در نظر بگیرید و آن را  $R_i$  بنامید. داریم  $S \subset \bigcup_{i=1}^k R_i$  و  $\text{vol}(R_i) < \frac{\varepsilon}{k}$  پس  $\sum \text{vol}(R_i) < \varepsilon$ .

مثال ۲ در واقع مثال بالا را می‌توان به هر مجموعه شمارا  $S = \{p_1, p_2, \dots\}$  تعمیم داد. حول  $p_i$  مکعبی  $R_i$  به ضلع کوچکتر از  $\sqrt[n]{\frac{\varepsilon}{2^i}}$  در نظر بگیرید. داریم  $\sum_{i=1}^{\infty} \text{vol}(R_i) < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon$ .

مثال ۳ استدلال مشابه بالا نشان می‌دهد اگر  $S_1, S_2, \dots$  دنباله‌ای از مجموعه‌های با اندازه  $n$ -بعدی صفر باشد، اجتماع آنها نیز اندازه صفر دارد. در واقع می‌توان  $S_k$  را با دنباله‌ای از مستطیل‌ها به مجموع کوچکتر از  $\frac{\varepsilon}{k}$  پوشاند. مجموعه همه این مستطیل‌ها یک پوشش شمارا برای اجتماع  $S_k$  ها می‌دهد و مجموع حجم مستطیل از  $\varepsilon$  کوچکتر است.

مثال ۴ فرض کنید  $R$  یک مستطیل بسته در  $\mathbb{R}^{n-1}$  با حجم  $(n-1)$ -بعدی ناصفر  $V$  است و  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  یک تابع پیوسته. نمودار  $f$  یک زیرمجموعه  $\mathbb{R}^n$  است. نشان می‌دهیم نمودار  $f$ ، به عنوان یک زیرمجموعه  $\mathbb{R}^n$ ، دارای اندازه  $n$ -بعدی صفر است. برای  $\frac{\varepsilon}{V}$ ، طبق پیوستگی یکنواخت  $f$  روی  $R$ ،  $\delta > 0$  وجود دارد که هرگاه  $|x - x'| < \delta$ ، آنگاه  $|f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{V}$ . افزای  $R$  در نظر می‌گیریم با ضخامت آنقدر کوچک که هر دو نقطه در یک زیرمستطیل افراز، فاصله کوچکتر از  $\delta$  داشته باشند. حال برای هر زیرمستطیل  $(n-1)$  بعدی  $R_i$  از این افراز، مستطیلی  $n$  بعدی  $S_i$  به ترتیب زیر می‌سازیم. فرض کنید  $M_i$  و  $m_i$  به ترتیب ماکسیمم و مینیمم تابع پیوسته  $f$  روی  $R_i$  باشند.  $S_i$  را متشکل از نقاط  $(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$  می‌گیریم که  $(x_1, \dots, x_{n-1})$  در  $R_i$  باشد و  $m_i \leq x_n \leq M_i$ . داریم

$$\text{vol}(S_i) = \text{vol}(R_i) \times (M_i - m_i)$$

که در طرف چپ  $vol(S_i)$  حجم  $n$  بعدی است و در طرف راست،  $vol(R_i)$ ، حجم  $(n - 1)$  بعدی. بنابراین انتخاب  $\delta > 0$ ، داریم  $M_i - m_i < \frac{\varepsilon}{V}$ ، پس  $vol(S_i) < \frac{\varepsilon}{V} vol(R_i)$ . حال توجه کنید که  $S_i$  ها نمودار  $f$  را می پوشانند و

$$\sum_i vol(S_i) = \sum_i (vol(R_i) \times (M_i - m_i)) < \frac{\varepsilon}{V} \sum_i vol(R_i) = \varepsilon$$

مثال فوق وسیله سودمندی برای محاسبه انتگرال روی ناحیه های غیرمستطیل شکل خواهد شد. اکنون به بررسی انتگرال روی مجموعه های غیرمستطیلی می پردازیم. فرض کنید  $D$  یک مجموعه کراندار در  $\mathbb{R}^n$  باشد و  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  یک تابع کراندار. چون  $D$  کراندار است، مستطیلی بسته  $R$  وجود دارد که  $D \subset R$ . تابع  $\tilde{f}: R \rightarrow \mathbb{R}$  را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in D \\ 0 & x \notin D \end{cases}$$

#### شکل ۴

حال اگر  $\tilde{f}$  روی  $R$  انتگرال پذیر باشد، چون  $\tilde{f}$  خارج  $D$  صفر است، طبیعی است که  $\int_D f$  را برابر  $\int_R \tilde{f}$  تعریف کنیم. یک سوال اساسی که بلافاصله مطرح می شود این است که حتی اگر  $f$  روی  $D$  پیوسته نباشد، جهش مقادیر  $\tilde{f}$  به صفر خارج از  $D$  می تواند ناپیوستگی در سراسر مرز  $D$  پدید آورد. بدین ترتیب اگر ناحیه  $D$  دارای این ویژگی باشد که مرز  $D$  اندازه  $n$  بعدی صفر داشته باشد، آنگاه  $\tilde{f}$  روی  $R$  انتگرال پذیر خواهد شد مشروط بر این که مجموعه نقاط ناپیوستگی  $f$  در  $D$  نیز یک مجموعه با اندازه  $n$  بعدی صفر باشد (بالاخص اگر  $f$  روی  $D$  پیوسته باشد). ناحیه های کراندار  $D$  در  $\mathbb{R}^n$  را که مرز دارای اندازه  $n$  بعدی صفر داشته باشند ناحیه های مجاز خواهیم خواند. هر تابع پیوسته و کراندار روی یک چنین ناحیه مجاز انتگرال پذیر می شود (اگر  $D$  به علاوه بسته باشد، یعنی شامل مرز خود باشد، تابع پیوسته  $f$  روی  $D$  خود به خود کراندار می شود). اگر  $D$  یک ناحیه مجاز در  $\mathbb{R}^n$  باشد، حجم  $n$  بعدی  $D$  را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$vol(D) = \int_D 1$$

که در طرف راست، مقصود از ۱ تابع ثابت با مقدار ۱ روی  $D$  است. اکنون می‌توانیم خواصی مشابه آنچه در (۲-۳۲) آمد برای انتگرال روی ناحیه‌های مجاز بیان کنیم. این خواص عموماً از (۲-۳۲) نتیجه می‌شوند:

(۴-۳۲) خواص ابتدایی انتگرال روی ناحیه‌های مجاز

(۳۲-۴-۱) (خطی بودن) اگر  $f, g$  روی ناحیه مجاز  $D$  انتگرال پذیر باشند و  $c$  یک عدد حقیقی باشد، آنگاه  $f + g$  و  $cf$  روی  $D$  انتگرال پذیرند و:

$$\int_D (f + g) = \int_D f + \int_D g \quad (6)$$

$$\int_D (cf) = c \int_D f \quad (7)$$

(۳۲-۴-۲) اگر  $f$  روی ناحیه مجاز  $D$  انتگرال پذیر باشد و  $f(x) \geq 0$  برای هر  $x$  در  $D$ ، آنگاه:

$$\int_D f \geq 0 \quad (8)$$

از (۳۲-۴-۲) و (۱-۴-۳۲) نتیجه می‌شود که اگر  $g, h$  روی ناحیه مجاز  $D$  انتگرال پذیر باشند و  $g(x) \geq h(x)$  برای هر  $x$  در  $D$ ، آنگاه

$$\int_D g \geq \int_D h \quad (9)$$

(۳۲-۴-۳) اگر  $f$  تابع ثابت  $f(x) = k$  روی ناحیه مجاز  $D$  باشد، آنگاه  $f$  روی  $D$  انتگرال پذیر است

و

$$\int_D f = k \cdot \text{vol}(D) \quad (10)$$

(۳۲-۴-۴) اگر ناحیه مجاز  $D$  اجتماع دو ناحیه مجاز  $D'$  و  $D''$  باشد که فقط در مرز اشتراک دارند و  $f$  روی هر یک از  $D'$  و  $D''$  انتگرال پذیر باشد، آنگاه  $f$  روی  $D$  انتگرال پذیر است و

$$\int_D f = \int_{D'} f + \int_{D''} f \quad (11)$$

زیرمجموعه  $U$  از  $\mathbb{R}^n$  را همبند مسیری می نامیم در صورتی که برای هر دو نقطه  $A, B$  از  $U$ ، خمی پیوسته  $\gamma : [a, b] \rightarrow U$  وجود داشته باشد که  $\gamma(a) = A$  و  $\gamma(b) = B$ .

(۳۲-۴-۵) قضیه میانگین انتگرال فرض کنید  $D$  یک ناحیه بسته و همبند مسیری در  $\mathbb{R}^n$  باشد و  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  یک تابع پیوسته. در این صورت نقطه ای  $P$  در  $D$  وجود دارد که:

$$\int_D f = f(P) \cdot \text{vol}(D) \quad (12)$$

اثباتی از این حکم ارائه می کنیم. چون  $f$  پیوسته است روی مجموعه بسته و کراندار  $D$  در نقطه ای  $A$  مینیمم و در نقطه ای  $B$  ماکسیمم خود را اتخاذ می کند،  $f(A) = m$  و  $f(B) = M$ . برای هر  $x$  در  $D$  داریم  $m \leq f(x) \leq M$  پس بنابر (۹) و (۱۰):

$$m \cdot \text{vol}(D) \leq \int_D f \leq M \cdot \text{vol}(D)$$

یا

$$m \leq \frac{\int_D f}{\text{vol}(D)} \leq M \quad (13)$$

چون  $D$  همبند مسیری فرض شده است، خمی پیوسته  $\gamma : [a, b] \rightarrow D$  وجود دارد که  $\gamma(a) = A$  و  $\gamma(b) = B$ . پس  $(f \circ \gamma)(a) = m$  و  $(f \circ \gamma)(b) = M$ . حال  $f \circ \gamma$  تابعی پیوسته از  $[a, b]$  به  $\mathbb{R}$  است که در نقطه  $a$  مقدار  $m$  و در نقطه  $b$  مقدار  $M$  را می گیرد. بنابر قضیه مقدار بینی باید نقطه ای  $c$  در  $[a, b]$  وجود داشته باشد که  $(f \circ \gamma)(c) = \frac{\int_D f}{\text{vol}(D)}$ . نقطه  $P = \gamma(c)$  در حکم قضیه صدق می کند.



## محاسبه انتگرال چندگانه

پس از بحث در مورد کلیات انتگرال که در بخش قبل گذشت، اکنون به تشریح روش محاسبه انتگرال چندگانه می‌پردازیم. مقدمتاً ذکر یکی دو نکته در مورد نمادها لازم است. انتگرال تابع  $f$  روی مجموعه  $D$  از  $\mathbb{R}^n$  را تاکنون به  $\int_D f$  نمایش داده‌ایم. برای تأکید  $n$  بعدی بودن ناحیه  $D$ ، بعضی نماد  $\int \cdots \int_D f$  (با  $n$  بار  $f$ ) را به کار می‌برند. همچنین اگر نقاط  $D$  به  $x = (x_1, \dots, x_n)$  نمایش داده شده باشند، نماد  $\int \cdots \int f(x_1, \dots, x_n) dV$  یا  $\int \cdots \int f(x_1, \dots, x_n) dV_x$  نیز به کار گرفته می‌شود. گاهی از  $dV$  به عنوان "عنصر حجم  $n$ -بعدی" یاد می‌شود. در حالت دو بعدی،  $n = 2$ ، به جای  $dV$  معمولاً از  $dA$  ("عنصر سطح") استفاده می‌شود.

محاسبه انتگرال را با انتگرال دوگانه روی مستطیل آغاز می‌کنیم. قضیه زیر راهگشای حالت کلی است.

(۳۳-۱) قضیه فرض کنید مستطیل بسته  $D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$  و تابع انتگرال‌پذیر  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  داده شده است. در این صورت:

$$\int \int_D f(x, y) dA = \int_a^b \left[ \int_c^d f(x, y) dy \right] dx \quad (1)$$

$$= \int_c^d \left[ \int_a^b f(x, y) dx \right] dy \quad (2)$$

نخست برای (۱) (معادلاً (۲)) یک تعبیر هندسی ارائه می‌کنیم. حالت  $f(x, y) \geq 0$  را در نظر بگیرد. در انتگرال داخلی (۱)، برای  $x$  ثابت یک انتگرال‌گیری نسبت به  $y$  انجام شده است. این به منزله محاسبه مساحت مقطع ثابت  $x =$  در زیر نمودار  $f$  است. بنابراین (۱) بیانگر این مطلب است که برای محاسبه حجم زیر نمودار، برای هر  $x$  ثابت مساحت مقطع مربوط زیر نمودار را محاسبه می‌کنیم که تابعی از  $x$  می‌شود سپس با محاسبه انتگرال این تابع مساحت برای  $a \leq x \leq b$ ، حجم مورد نظر را

به دست می آوریم. در واقع حجم زیر نمودار از انباشتن لایه‌های بینهایت نازک به ازای  $x$  های ثابت گوناگون به دست می آید.

تعبیر دیگر (۱) را می توان بر اساس مجموع‌های ریمان ارائه کرد. فرض کنید افراز  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_p = b$  برای  $[a, b]$  و افراز  $c = y_0 < y_1 < \dots < y_q = d$  برای  $[c, d]$  در نظر گرفته شوند و در زیرمستطیل  $R_{ij} : x_{i-1} \leq x \leq x_i$  و  $y_{j-1} \leq y \leq y_j$  نقطه دلخواهی  $z_{ij}$  در نظر بگیرید. مجموع ریمان مربوط عبارت است از

$$\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q f(z_{ij}) \cdot (y_j - y_{j-1})(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^p \left( \sum_{j=1}^q f(z_{ij})(y_j - y_{j-1}) \right) (x_i - x_{i-1}) \quad (3)$$

در پراوتز داخلی، برای  $i$  ثابت، نسبت به  $j$  جمع بندی شده است. برای گذر به حد، باید  $(x_i - x_{i-1})$  ها و  $(y_j - y_{j-1})$  ها تماماً به صفر میل کنند. فرمول (۱) بیانگر این است که تحت شرایط انتگرال گیری می توان نخست برای  $x$  ثابت گذر به حد را با کوچک کردن  $(y_j - y_{j-1})$  انجام داد و سپس حاصل را که وابسته به  $x$  است مجدداً با سوق دادن  $(x_i - x_{i-1})$  به صفر حدگیری کرد. با دقیق تر کردن این ایده می توان اثبات کاملی از (۱) ارائه کرد ولی این کار در اینجا انجام نخواهد شد.

مثال ۱ انتگرال تابع  $f(x) = x^2 y + e^{-2y}$  را روی مستطیل  $0 \leq y \leq 1$ ،  $1 \leq x \leq 2$  محاسبه کنید. این محاسبه را از هر دو روش (۱) و (۲) انجام می دهیم. اگر  $R$  مستطیل فوق باشد:

$$\begin{aligned} \int \int_R (x^2 y + e^{-2y}) dA &= \int_1^2 \left[ \int_0^1 (x^2 y + e^{-2y}) dy \right] dx \quad \text{از فرمول (۱)} \\ &= \int_1^2 \left[ \frac{1}{2} x^2 y^2 - \frac{1}{2} e^{-2y} \right]_0^1 dx \\ &= \int_1^2 \left( \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} e^{-2} + \frac{1}{2} \right) dx \\ &= \left[ \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{2} (1 - e^{-2}) x \right]_1^2 \\ &= \frac{8}{3} + (1 - e^{-2}) - \frac{1}{6} - \frac{1}{2} (1 - e^{-2}) = \frac{5}{3} - \frac{1}{2} e^{-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \int_R (x^2 y + e^{-2y}) dA &= \int_0^1 \left[ \int_1^2 (x^2 y + e^{-2y}) dx \right] dy \quad (2) \text{ از فرمول} \\
&= \int_0^1 \left[ \frac{1}{3} x^3 y - e^{-2y} x \right]_1^2 dy \\
&= \int_0^1 \left( \frac{7}{3} y + e^{-2y} \right) dy \\
&= \left( \frac{7}{6} y^2 - \frac{1}{2} e^{-2y} \right) \Big|_0^1 = \frac{7}{6} - \frac{1}{2} e^{-2} + \frac{1}{2} = \frac{5}{3} - \frac{1}{2} e^{-2}
\end{aligned}$$

قضیه (۱-۲۳) تعمیمی واضح به حالت مستطیل  $n$ -بعدی دارد. به طور کلی می توان یک انتگرال روی مستطیل  $n$  بعدی را به  $n!$  نوع مختلف به عنوان انتگرال مکرر بیان کرد.

مثال ۲ انتگرال تابع  $f(x, y, z) = x + e^{-y+z}$  را روی مستطیل  $R$  با مشخصات  $1 \leq x \leq 2$ ،  $0 \leq y \leq 1$ ،  $0 \leq z \leq 2$ ، محاسبه کنید. این انتگرال را به یکی از شش ترتیب ممکن محاسبه می کنیم.

$$\begin{aligned}
\int \int \int_R (x + e^{-y+z}) dV &= \int_0^2 \left[ \int_0^1 \left[ \int_1^2 (x + e^{-y+z}) dx \right] dy \right] dz \\
&= \int_0^2 \left[ \int_0^1 \left[ \left( \frac{1}{2} x^2 + e^{-y+z} x \right) \right]_1^2 dy \right] dz \\
&= \int_0^2 \left[ \int_0^1 \left( \frac{3}{2} + e^{z-y} \right) dy \right] dz \\
&= \int_0^2 \left( \frac{3}{2} y - e^{z-y} \right) \Big|_0^1 dz \\
&= \int_0^2 \left( \frac{3}{2} - e^{z-1} + e^z \right) dz \\
&= \left( \frac{3}{2} z - e^{z-1} + e^z \right) \Big|_0^2 = 3 - e + e^2 + e^{-1} - 1 \\
&= 2 - e + e^2 + e^{-1}
\end{aligned}$$

برای محاسبه انتگرال روی ناحیه های غیر مستطیل شکل، به روش زیر عمل می کنیم. اگر ناحیه مجاز  $D$  و تابع انتگرال پذیر  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  داده شده باشد، مانند جلسه قبل،  $D$  را در یک مستطیل  $R$  جای داده، تابع  $f$  را به تابعی  $\tilde{f}$  توسعه می دهیم که در  $R$  تعریف شده ولی خارج  $D$  صفر است، به عنوان مثال مورد زیر را در نظر بگیرید. فرض کنید تابع های  $\alpha, \beta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  داده شده اند که  $\alpha(x) \leq \beta(x)$

برای هر  $x$  در  $[a, b]$ . ناحیه  $D$  به شکل زیر را یک ناحیه  $y$ -محدب می‌نامیم:

$$D : \begin{cases} a \leq x \leq b \\ \alpha(x) \leq y \leq \beta(x) \end{cases}$$

حال ناحیه  $y$ -محدب  $D$  را در مستطیل  $R$  با تعریف  $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$  که  $c \leq \alpha(x) \leq \beta(x) \leq d$  قرار می‌دهیم و داریم:

$$\iint_D f(x, y) dA = \iint_R \tilde{f}(x, y) dA = \int_a^b \left[ \int_c^d \tilde{f}(x, y) dy \right] dx$$

برای  $x$  ثابت،  $\tilde{f}(x, y)$  به‌ازای  $y < \alpha(x)$  و  $y > \beta(x)$  صفر است، پس

$$\int_c^d \tilde{f}(x, y) dy = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy$$

و در نتیجه:

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_a^b \left[ \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy \right] dx \quad (4)$$

ضمناً توجه کنید که اگر  $\alpha$  و  $\beta$  پیوسته باشند، همچنان که در درس قبل دیدیم نمودار هر یک، یک مجموعه دارای اندازه صفر دو بعدی خواهد بود و ناحیه  $D$  یک ناحیه مجاز انتگرال‌گیری است.

به همین ترتیب یک ناحیه  $x$ -محدب ناحیه‌ای با توصیف زیر است:

$$D : \begin{cases} c \leq y \leq d \\ \gamma(y) \leq x \leq \delta(y) \end{cases}$$

و اگر تابع‌های  $\gamma$  و  $\delta$  پیوسته باشند،  $D$  یک ناحیه مجاز انتگرال‌گیری خواهد بود.

برای این نوع ناحیه به ترتیب قبل خواهیم داشت:

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_c^d \left[ \int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x, y) dx \right] dy \quad (5)$$

مثال ۳ ربع گوی زیر را در نظر بگیرید:

$$D : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 1 \leq y \leq 1 + \sqrt{1 - x^2} \end{cases}$$

می‌خواهیم  $\int \int_D x dA$  را محاسبه کنیم. طبق فرمول (۴) داریم:

$$\begin{aligned} \int \int_D x dA &= \int_0^1 \left[ \int_1^{1+\sqrt{1-x^2}} x dy \right] dx \\ &= \int_0^1 (xy) \Big|_1^{1+\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \int_0^1 x \sqrt{1-x^2} dx \\ &= \left( -\frac{1}{3} \right) \left( \frac{2}{3} \right) (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

ناحیه  $D$ ،  $x$ -محدب نیز هست و می‌توان آن را به شکل زیر تعریف کرد:

$$\begin{cases} 1 \leq y \leq 2 \\ 0 \leq x \leq \sqrt{2y-y^2} \end{cases}$$

بنابراین،

$$\begin{aligned} \int \int_D x dA &= \int_1^2 \left[ \int_0^{\sqrt{2y-y^2}} x dx \right] dy \\ &= \int_1^2 \left( \frac{1}{2} x^2 \right) \Big|_0^{\sqrt{2y-y^2}} dy \\ &= \frac{1}{2} \int_1^2 (2y-y^2) dy \\ &= \left( \frac{1}{2} \right) \left( y^2 - \frac{1}{3} y^3 \right) \Big|_1^2 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

گاهی اوقات محاسبه یک انتگرال به یکی از دو روش (۴) یا (۵) مقدور نیست یا دشوار است ولی به روش دیگر امکان‌پذیر است. مثال زیر نمونه‌ای از این وضعیت است.

مثال ۴ می‌خواهیم انتگرال تابع  $f(x, y) = e^{-y^2}$  را روی ناحیه مثلثی زیر محاسبه کنیم:

$$T : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ x \leq y \leq 1 \end{cases}$$

اگر این ناحیه را به شکل  $y$ -محدب تلقی کنیم، داریم:

$$\int \int_T e^{-y^2} dA = \int_0^1 \left[ \int_x^1 e^{-y^2} dy \right] dx$$

در اینجا به این مشکل برمی‌خوریم که تابع اولیه  $e^{-y^2}$  را نمی‌شناسیم و ادامه محاسبه به این طریق عملی نیست. ولی اگر  $T$  را به صورت  $x$ -محدب بنویسیم، نتیجه حاصل خواهد شد:

$$T : \begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ 0 \leq x \leq y \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \iint_T e^{y^2} dA &= \int_0^1 \left[ \int_0^y e^{y^2} dx \right] dy \\ &= \int_0^1 (e^{-y^2} x) \Big|_0^y dy \\ &= \int_0^1 e^{-y^2} y dy \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right) e^{-y^2} \Big|_0^1 = \left(-\frac{1}{2}\right)(e^{-1} - 1) \end{aligned}$$

روشی که برای محاسبه انتگرال برای ناحیه‌های دو بعدی غیر مستطیل شکل ذکر شد به حالت  $n$  بعدی نیز تعمیم پذیر است و اگر بتوانیم ناحیه  $D$  در  $\mathbb{R}^n$  را به صورت زیر توصیف کنیم:

$$\begin{cases} \alpha_n(x_1, \dots, x_{n-1}) \leq x_n \leq \beta(x_1, \dots, x_{n-1}) \\ \vdots \\ \alpha_2(x_1) \leq x_2 \leq \beta_2(x_1) \\ \alpha_1 \leq x_1 \leq \beta_1 \end{cases}$$

آنگاه  $f \cdots \int_D f$  را می‌توان به صورت زیر محاسبه کرد:

$$\int \cdots \int_D f = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \left[ \int_{\alpha_2(x_1)}^{\beta_2(x_1)} \left[ \cdots \left[ \int_{\alpha_n(x_1, \dots, x_{n-1})}^{\beta_n(x_1, \dots, x_{n-1})} f(x_1, \dots, x_n) dx_n \right] dx_{n-1} \cdots \right] dx_1 \quad (7)$$

البته هر ترتیب دیگری از متغیرهای  $x_1, \dots, x_n$  نیز ممکن است به کار رود. توجه کنید که در هر مرحله انتگرال گیری در فرمول (7) حداقل یکی از متغیرها از بین می‌رود به طوری که در مرحله آخر فقط یک انتگرال گیری با حدود عددی باقی می‌ماند.

**مثال 5** حجم ناحیه محصوره به  $z \geq x^2 + y^2$  و داخل استوانه  $z = 2 - x^2$  را به کمک انتگرال سه‌گانه محاسبه کنید.

ناحیه مورد نظر را می توان به صورت زیر توصیف کرد:

$$D : \begin{cases} -\sqrt{z-x^2} \leq y \leq \sqrt{z-x^2} \\ 2 - \sqrt{1-x^2} \leq z \leq 2 + \sqrt{1-x^2} \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

بنابراین

$$\iiint_D 1 dV = \int_{-1}^1 \left[ \int_{2-\sqrt{1-x^2}}^{2+\sqrt{1-x^2}} \left[ \int_{-\sqrt{z-x^2}}^{\sqrt{z-x^2}} dy \right] dz \right] dx$$

و با سه بار انتگرال گیری حجم مورد نظر به دست می آید.

مثال ۶ حجم ناحیه محصور بین دو استوانه  $x^2 + y^2 = a^2$  و  $x^2 + z^2 = a^2$  را محاسبه کنید ( $a > 0$ ).

توجه کنید که این جسم روی گوی  $x^2 + y^2 \leq a^2$  بنا شده است، جدار بالایی آن روی نیمه بالایی سطح استوانه  $x^2 + z^2 = a^2$  و جدار پایینی آن روی نیمه پایینی سطح همین استوانه قرار دارد. ناحیه سه بعدی را می توان به صورت زیر توصیف کرد:

$$D : \begin{cases} -\sqrt{a^2-x^2} \leq z \leq \sqrt{a^2-x^2} \\ -\sqrt{a^2-x^2} \leq y \leq \sqrt{a^2-x^2} \\ -a \leq x \leq a \end{cases}$$

پس

$$\iiint_D 1 dV = \int_{-a}^a \left[ \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \left[ \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \right] dz \right] dx$$

مثال ۷ حجم چهار بعدی گوی  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \leq R^2$  در  $\mathbb{R}^4$  را محاسبه کنید.

این ناحیه را می توان به شکل زیر توصیف کرد:

$$D : \begin{cases} -\sqrt{R^2 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)} \leq x_4 \leq \sqrt{R^2 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)} \\ -\sqrt{R^2 - (x_1^2 + x_2^2)} \leq x_3 \leq \sqrt{R^2 - (x_1^2 + x_2^2)} \\ -\sqrt{R^2 - x_1^2} \leq x_2 \leq \sqrt{R^2 - x_1^2} \\ -R \leq x_1 \leq R \end{cases}$$

می‌توان به روش ذکر شده به نتیجه رسید ولی با توجه به این که فرمول حجم گوی سه بعدی را می‌دانیم، محاسبه را می‌توان در یک گام خلاصه کرد. توجه کنید که برای  $x_1$  ثابت، مقطع این گوی، یک گوی سه بعدی به شعاع  $\sqrt{R^2 - x_1^2}$  است که حجم سه بعدی آن  $\frac{4}{3}\pi(R^2 - x_1^2)^{\frac{3}{2}}$  می‌باشد این در واقع نتیجه سه انتگرال گیری اول روی ناحیه بالا است. بنابراین

$$\text{حجم گوی چهار بعدی} = \int_{-R}^R \frac{4}{3}\pi(R^2 - x_1^2)^{\frac{3}{2}} dx_1$$

با قرار دادن  $x_1 = R \sin \theta$ ، انتگرال بالا تبدیل می‌شود به

$$\begin{aligned} \left(\frac{4}{3}\pi\right) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (R^2 \cos^2 \theta)(R \cos \theta) d\theta &= \left(\frac{4}{3}\pi R^4\right) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \theta d\theta \\ &= \left(\frac{4}{3}\pi R^4\right) \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{9}\pi R^4 \end{aligned}$$

بالاخره این نکته در مورد نماد انتگرال مکرر قابل ذکر است که معمولاً گروه‌ها نوشته نمی‌شوند و مقصود از نماد  $\int \dots \int f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$  این است که انتگرال گیری از داخل به خارج به ترتیب نسبت به  $x_1$ ، بعد نسبت به  $x_2$ ، ... و نهایتاً نسبت به  $x_n$  انجام می‌شود.



## رویه‌های هموار

در بخش‌های ۱۲، ۱۳ و ۱۴ به بررسی نسبتاً مسبوتی از 'خمهای هموار' پرداختیم. در اینجا می‌خواهیم به توصیف اشیاء هموار دوبعدی احتمالاً خمیده (غیر مسطح) بپردازیم. به این منظور نخست مفهوم 'رویه پارامتری' را مطرح می‌کنیم، سپس شرطی را که متضمن خاصیت 'هموار بودن' است به تعریف می‌افزائیم. برای توصیف رویه که برداشت ذهنی ما از آن یک شی دوبعدی است دو پارامتر مورد نیاز است همانگونه که برای توصیف خم (یک بعدی) یک پارامتر  $t$  مورد استفاده قرار می‌گرفت.

اگر  $W$  یک ناحیه در صفحه  $uv$  باشد، تابع

$$\vec{r} = \varphi(u, v) \quad , \quad \varphi : W \rightarrow \mathbb{R}^3$$

یک رویه پارامتری در  $\mathbb{R}^3$  تعریف می‌کند. صفات پیوسته، مشتق‌پذیر، مشتق‌پذیر با مشتقات پاره‌ای پیوسته (اصطلاحاً  $C^1$ ) وقتی به رویه پارامتری اطلاق شوند مقصود این است که تابع  $\varphi$  از این صفات برخوردار است. البته  $\varphi(u, v)$  دارای سه مؤلفه  $(x, y, z)$  است،  $x = \varphi_1(u, v)$ ،  $y = \varphi_2(u, v)$ ،  $z = \varphi_3(u, v)$  و صفت مربوط باید برای هر یک از تابع‌های  $\varphi_1$ ،  $\varphi_2$  و  $\varphi_3$  برقرار باشد. شکل ۱ تجسم ما از رویه‌های پارامتری را نشان می‌دهد انتظار داریم خطوط راست (ثابت  $u$ ) و (ثابت  $v$ ) تحت اثر  $\varphi$  به خم‌هایی روی تصویر  $\varphi$  منتقل شوند و نوعی "دستگاه مختصات خمیده" روی  $\varphi(W)$  بسازند

شکل ۱

این انتظار در حالت کلی کمی خوشبینانه است زیرا که به طور کلی تصویر  $\varphi$  ممکن است "دوبعدی" نشود، مثلاً  $\varphi$  ممکن است کل  $W$  را به یک پاره‌خط یا حتی یک نقطه بنگارد (تابع ثابت). در مورد خم‌ها، افزودن شرط پیوستگی مشتق و ناصفر ماندن بردار سرعت، این تضمین را ایجاد کرد که تصویر

خم پارامتری "یک بعدی و هموار" است. در اینجا باید شرط مشابهی را جستجو کنیم. مشتق‌های پاره‌ای  $\varphi$  نسبت به  $u$  و  $v$  را به ترتیب به  $\vec{r}_u$  و  $\vec{r}_v$  نمایش می‌دهیم. بدین ترتیب:

$$\vec{r}_u = \left( \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right), \quad \vec{r}_v = \left( \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right)$$

$\vec{r}_u$  و  $\vec{r}_v$  تعبیر هندسی جالب توجهی دارند. با ثابت نگاهداشتن  $v = v_0$  و مشتق‌گیری نسبت به  $u$ ، بردار سرعت خم  $\varphi(u, v_0)$  را که روی  $\varphi(u, v)$  قرار دارد در نظر گرفته‌ایم، و به همین ترتیب  $\vec{r}_v$  بردار سرعت خم  $\varphi(u_0, v)$  است. پس  $\vec{r}_u$  و  $\vec{r}_v$  بردارهای مماس بر  $\varphi(W)$  در نقطه  $\varphi(u, v)$  تلقی می‌شوند. اگر  $\vec{r}_u$  و  $\vec{r}_v$  همراستا نباشند، انتظار داریم  $u$  و  $v$  دو جهت مستقل روی رویه  $\varphi(W)$  را مدرج کنند و بدین ترتیب شیئی "دو بعدی" حاصل شود. با این زمینه، رویه پارامتری  $\varphi: W \rightarrow \mathbb{R}^3$  را هموار می‌نامیم در صورتی که شرایط زیر برقرار باشند:

(الف)  $\varphi$  مشتق‌پذیر با مشتق‌های پاره‌ای پیوسته باشد.

(ب) به‌ازای هر  $(u, v)$  در  $W$  داشته باشیم  $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq \mathbf{0}$  (معادلاً  $\vec{r}_u$  و  $\vec{r}_v$  همراستا نباشند).

ضمناً توجه کنید که چون  $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$  بر  $\vec{r}_u$  و  $\vec{r}_v$  عمود است، و  $\vec{r}_u, \vec{r}_v$  دو جهت مماس مستقل بر رویه را نشان می‌دهند، بردار واحد  $\vec{n} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|}$  بر  $\varphi(W)$  عمود خواهد بود.  $\vec{n}$  را قائم واحد قراردادی رویه هموار  $\varphi$  می‌نامیم.

برای توجیه اصطلاح هموار، نشان می‌دهیم که تحت این شرط، اگر  $(u_0, v_0)$  نقطه‌ای از  $W$  باشد، آنگاه تحت شرط هموار بودن، گوی بازی  $D$  حول  $(u_0, v_0)$  وجود دارد که تصویر آن تحت  $\varphi$ ، در واقع نمودار یک تابع مشتق‌پذیر دو متغیری است. اگر ماتریس ژاکوبی  $\varphi$  (مشتق  $\varphi$ ) در نقطه  $(u_0, v_0)$  را در نظر بگیریم، داریم:

$$D\varphi(u_0, v_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix}$$

یعنی  $\vec{r}_u$  و  $\vec{r}_v$  ستون‌های این ماتریس هستند. همراستا نبودن  $\vec{r}_u$  و  $\vec{r}_v$  دلالت بر این می‌کند که تصویرهای قائم این دو بردار بردست کم یکی از سه صفحه مختصات  $xy$ ،  $yz$  یا  $zy$  همراستا نیستند.

برای صراحت فرض کنید تصویر این دو بر صفحه  $xy$  همراستا نباشند، یعنی  $(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u})$  و  $(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v})$  همراستا نباشند. نتیجه اینکه

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}_{(u_0, v_0)} \neq 0$$

طبق قضیه تابع وارون مجموعه باز  $D'$  حول  $(x_0, y_0)$  (تصویر قائم  $\varphi(u_0, v_0)$  روی صفحه  $xy$ ) وجود دارد و مجموعه باز  $D$  حول  $(u_0, v_0)$  به طوری که  $\varphi$  یک تناظر یک به یک میان  $D$  و  $D'$  برقرار می‌کند و وارون آن،  $\varphi^{-1}: D' \rightarrow D$  نیز مشتق پذیر است. بدین ترتیب  $(u, v)$  در  $D$  تابعی مشتق پذیر از  $(x, y)$  در  $D'$  می‌شود. نتیجه این که  $z = \varphi_3(u, v)$  نیز تابعی مشتق پذیر از  $(x, y)$  است،

$$z = (\varphi_3 \circ \varphi^{-1})(x, y)$$

پس نقاط  $\varphi(u, v) = (x, y, z)$  برای  $(u, v)$  نزدیک  $(u_0, v_0)$  به صورت  $(x, y, (\varphi_3 \circ \varphi^{-1})(x, y))$  یعنی نمودار تابع مشتق پذیر  $\varphi_3 \circ \varphi^{-1}$  قابل نمایش اند. بدین مفهوم شرط‌های (الف) و (ب) مفهوم شهودی هموار بودن را برقرار می‌کنند.

استدلال بالا ضمناً نشان می‌دهد که برای هر  $w_0 = (u_0, v_0)$  در  $W$ ، دامنه تعریف یک رویه هموار، مجموعه بازی حول  $w_0$  وجود دارد که تحدید  $\varphi$  به آن یک به یک است، هر چند که یک رویه هموار ممکن است نهایتاً خود را قطع کند. نکته دیگر این که  $\vec{r}_u$  و  $\vec{r}_v$ ، ستون‌های  $D\varphi(u, v)$ ، تصاویر  $e_1 = (1, 0)$  و  $e_2 = (0, 1)$  تحت اثر تقریب خطی هستند، بنابراین ضریب تغییر مساحت در نقطه  $(u, v)$  برابر مساحت متوازی الاضلاع تعریف شده توسط  $\vec{r}_u$  و  $\vec{r}_v$ ، یعنی  $|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|$  است (مراجعه کنید به بحث تعویض متغیر در انتگرال)، از این رو  $dS = |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| du dv$  را عنصر سطح رویه هموار  $\varphi$  می‌نامند. اگر  $D$  زیرمجموعه‌ای از  $W$  باشد که روی آن  $\varphi$  یک به یک است و  $D$  یک ناحیه مجاز انتگرال گیری در صفحه  $uv$  باشد، تعریف می‌کنیم:

$$\varphi(M) \text{ مساحت} = \int \int_D dS = \int \int_D |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| du dv$$

مثال ۱ اگر  $W$  یک زیرمجموعهٔ باز  $\mathbb{R}^2$  باشد و  $f: W \rightarrow \mathbb{R}$  یک تابع دارای مشتق‌های پاره‌ای پیوسته، نمودار  $f$  را می‌توان به صورت یک روبه هموار پارامتری کرد:

$$\varphi: W \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \varphi(u, v) = (u, v, f(u, v))$$

داریم  $\vec{r}_u \times \vec{r}_v = (-\frac{\partial f}{\partial u}, -\frac{\partial f}{\partial v}, 1)$ ،  $\vec{r}_v = (0, 1, \frac{\partial f}{\partial v})$ ،  $\vec{r}_u = (1, 0, \frac{\partial f}{\partial u})$  پس

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2} \quad , \quad \vec{n} = \frac{(-\frac{\partial f}{\partial u}, -\frac{\partial f}{\partial v}, 1)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2}}$$

به کمک  $dS$  بالا می‌توانیم مساحت نمودارها را محاسبه کنیم.

مثال ۱-۱ سطح جانبی جسم به دست آمده از اشتراک استوانه‌های  $x^2 + y^2 \leq 1$  و  $x^2 + z^2 \leq 1$  را محاسبه کنید.

برای این کار توجه کنید که به سبب تقارن، مساحت مورد نظر چهار برابر مساحت نمودار  $z = \sqrt{1-x^2}$  روی گوی  $x^2 + y^2 \leq 1$  است. داریم  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$ ،  $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$  پس مساحت نمودار برابر است با:

$$\begin{aligned} \int \int_{x^2+y^2 \leq 1} \sqrt{1 + \frac{x^2}{1-x^2}} dA &= \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dy dx \\ &= \int_{-1}^1 2 dx = 4 \end{aligned}$$

بنابراین سطح جانبی مورد نظر برابر ۱۶ است. همین نتیجه را از روش انتگرال‌گیری روی خم نیز به دست آورده بودیم.

مثال ۲ کره شعاع  $R$  حول  $z$  در  $\mathbb{R}^3$  را به کمک مختصات کروی پارامتری می‌کنیم. تعریف می‌کنیم:

$$\varphi(u, v) = (R \sin u \cos v, R \sin u \sin v, R \cos u)$$

$$0 \leq u \leq \pi, \quad 0 \leq v \leq 2\pi$$

در اینجا مختصه‌های کروی  $\varphi$  و  $\theta$  به ترتیب به  $u$  و  $v$  نمایش داده شده‌اند. داریم:

$$\vec{r}_u = (R \cos u \cos v, R \cos u \sin v, -R \sin u) \quad , \quad \vec{r}_v = (-R \sin u \sin v, R \sin u \cos v, 0)$$

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = (R^2 \sin^2 u \cos v, R^2 \sin^2 u \sin v, R^2 \sin u \cos v) \quad , \quad dS = R^2 \sin u du dv$$

توجه کنید که شرط هموار بودن به ازای  $u = 0, \pi$  (دو قطب کره) نقض می‌شود. این پدیده فقط ناشی از روش پارامتری کردن است و ارتباطی با شکل کره ندارد. توجه کنید که در دو قطب خطوط مختصاتی، یعنی تصاویر ثابت  $u = 0$  و ثابت  $v = 0$  (مدارها و نصف النهارها) از حالت متقاطع بودن خارج می‌شوند زیرا تصویر هر یک از  $u = 0$  و  $u = \pi$  یک تک نقطه است. با این حال، برای منظوره‌های انتگرال‌گیری، چنانچه تابعی در سراسر کره انتگرال‌پذیر باشد، دو خط  $u = 0$  و  $u = \pi$  که اندازه دو بعدی صفر در مستطیل  $0 \leq u \leq \pi$ ،  $0 \leq v \leq 2\pi$  دارند، بی‌اثر هستند.

مثال ۳ (چنبره دوار) برای ثابت‌های  $a > b > 0$ ، تعریف می‌کنیم:

$$\vec{r} = \varphi(u, v) = ((a + b \cos u) \cos v, (a + b \cos u) \sin v, b \sin u)$$

$$0 \leq u \leq 2\pi, \quad 0 \leq v \leq 2\pi$$

این رویه از دوران دایره شعاع  $b$  به مرکز  $(a, 0)$  در صفحه  $xz$  حول محور  $z$  به دست می‌آید. تعبیر زاویه‌های  $u$  و  $v$  در شکل ۲ نمایش داده شده است.  $u$  دایره اولیه را مدرج می‌کند و  $v$  در واقع مختصه  $\theta$  در مختصات استوانه‌ای است، داریم:

$$\begin{cases} \vec{r}_u = ((-b \sin u) \cos v, (-b \sin u) \sin v, b \cos u) \\ \vec{r}_v = (-(a + b \cos u) \sin v, (a + b \cos u) \cos v, 0) \end{cases}$$

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = (-b(a + b \cos u) \cos u \cos v, -b(a + b \cos u) \cos u \sin v, -b \sin u(a + b \cos u))$$

$$|\vec{r}_u \times \vec{r}_v| = b(a + b \cos u), \quad dS = b(a + b \cos u) du dv$$

توجه کنید که شرط هموار بودن همه جا برقرار است. مساحت این چنبره برابر می‌شود با:

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} b(a + b \cos u) du dv = (2\pi b)(2\pi a) = 4\pi^2 ab$$

شکل ۲

مثال ۴ برای  $a, b, c > 0$  داده شده تعریف می‌کنیم:

$$\vec{r} = \varphi(u, v) = (a \cosh u \cos v, b \cosh u \sin v, c \sinh u)$$

$$0 \leq u \leq 1, \quad 0 \leq v \leq 2\pi$$

اگر سه مؤلفه  $\varphi(u, v)$  را به ترتیب  $x, y, z$  بخوانیم، خواهیم داشت:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

پس تصویر جزیی از هذلولی واریکپارچه  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$  است، در واقع قسمتی که برای آن  $0 \leq z \leq c \sinh 1$  داریم. (شکل ۳).

$$\vec{r}_u = (a \sinh u \cos v, b \sinh u \sin v, c \cosh u), \vec{r}_v = (-a \cosh u \sin v, b \cosh u \cos v, 0)$$

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = (-bc \cosh^2 u \cos v, -ac \cosh^2 u \sin v, ab \sinh u \cosh u) \neq \underline{0}$$

پس شرط هموار بودن برقرار است.

### شکل ۳

در مثال‌های بالا عمدتاً شرط هموار بودن نقض نمی‌شد و در یک مورد (کره) نقض این شرط تعبیر هندسی نداشت، بلکه یک ویژگی روش پارامتری کردن را منعکس می‌کرد. در زیر چند مثال از ناهنجاری‌های هندسی که ممکن است در اثر نقض شرط هموار بودن پیش آید نشان می‌دهیم:

مثال ۵ (الف) برای  $a, b, c$  داده شده تعریف کنید

$$\varphi(u, v) = (a, b, c), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

در اینجا به وضوح  $\vec{r}_u = \vec{r}_v = \underline{0}$  و شرط هموار بودن همه‌جا نقض می‌شود. تصویر  $\varphi$  در واقع یک تک نقطه‌ای است و یک "رویه" به مفهوم دو بعدی آن نیست.

(ب) برای تابع  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  که دارای مشتق‌های پاره‌ای پیوسته است، تعریف کنید:

$$\varphi(u, v) = (f(u, v), f(u, v), f(u, v))$$

تصویر  $\varphi$  بخشی از خط راست  $x = y = z$  است، یعنی یک بعدی است و با شهود رویه دو بعدی

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \underline{0} \text{ و } \vec{r}_v = \left( \frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial v} \right), \vec{r}_u = \left( \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial u} \right) \text{ در واقع}$$

(ج)

$$\vec{r} = \varphi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

داریم  $(\vec{r}_u = (\cos v, \sin v, 1), \vec{r}_v = (-u \sin v, u \cos v, 0))$  پس

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = (-u \cos v, -u \sin v, u)$$

به‌ازای  $u = 0$  شرط هموار بودن نقض می‌شود. در واقع تصویر  $\varphi$  مخروط  $x^2 + y^2 = z^2$  است و  $u = 0$  متناظر با رأس مخروط می‌باشد که در آن نقطه مخروط صفحه مماس ندارد

شکل ۳

(د) به مثال ۴، بخش ۱۲،  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ، نگاه کنید که در آن تصویر  $\gamma$  نمودار  $y = |x|$  را به صورت مشتق‌پذیر با مشتق پیوسته پارامتری می‌کند ولی  $\gamma'(0) = 0$ . حال تعریف کنید:

$$\vec{r} = \varphi(u, v) = (u, \gamma_1(v), \gamma_2(v)) \quad , \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

که در آن  $\gamma(v) = (\gamma_1(v), \gamma_2(v))$ . داریم:

$$\vec{r}_u = (1, 0, 0) \quad , \quad \vec{r}_v = (0, \gamma'_1(v), \gamma'_2(v)) \quad , \quad \vec{r}_u \times \vec{r}_v = (0, -\gamma'_2(v), \gamma'_1(v))$$

برای  $v = 0$ ، مستقل از  $u$ ، شرط هموار بودن نقض می‌شود.  $v = 0$  در شکل ۴ متناظر با خط "تاشدن" رویه است که در سراسر آن صفحه مماس بر تصویر رویه وجود ندارد. در اینجا لازم است یک نمایش معمول دیگر برای  $dS = |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| dudv$  را نیز معرفی کنیم. داریم:

$$|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|^2 = (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v)$$

طبق اتحاد لاگرانژ

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c}) \quad (1)$$

می‌توان نوشت:

$$|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|^2 = (\vec{r}_u \cdot \vec{r}_u)(\vec{r}_v \cdot \vec{r}_v) - (\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v)^2$$

معمولاً  $\vec{r}_u \cdot \vec{r}_u$  را به  $E$ ،  $\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v$  را به  $F$  و  $\vec{r}_v \cdot \vec{r}_v$  را به  $G$  نمایش می‌دهند (نمادگذاری گاوس)، پس:

$$dS = \sqrt{EG - F^2} dudv \quad (2)$$

یادداشت تصویر یک رویه هموار ممکن است پرمایش‌های گوناگون به عنوان رویه هموار داشته باشد، می‌توان «بازپرمایش» را همچنان که در مورد خم‌های هموار مطرح کردیم در اینجا نیز مطرح کنیم. در ساده‌ترین حالت فرض کنید  $W$  و  $W'$  دو مجموعه باز و همبند مسیری در  $\mathbb{R}^2$  باشند، نقاط  $W$  را به  $(u, v)$  و نقاط  $W'$  را به  $(u', v')$  نمایش دهید. فرض کنید  $\tau: W' \rightarrow W$  یک نگاشت یک به یک، پوشا و دارای مشتق‌های پاره‌ای پیوسته باشد که به‌ازای هر  $w' = (u', v')$  در  $W'$  داشته باشیم  $\det D\tau(w') \neq 0$ . اگر  $\varphi: W \rightarrow \mathbb{R}^3$  یک رویه هموار تعریف کند،  $\varphi \circ \tau: W' \rightarrow \mathbb{R}^3$  نیز یک رویه هموار است و همان مجموعه  $\varphi(W)$  را توصیف می‌کند. چون  $W'$  همبند مسیری فرض شده است،  $\det D\tau(w')$  برای همه نقاط  $w'$  از  $W'$  یا مثبت یا منفی است (در غیر این صورت اگر مسیر پیوسته‌ای بین دو نقطه با علامت مختلف در نظر بگیریم، به سبب پیوستگی  $\det D\varphi(w')$ ، این کمیت باید جایی در طول مسیر صفر شود که خلاف فرض است). در حالت اول  $\tau$  را یک بازپرمایش جهت‌نگهدار و در حالت دوم  $\tau$  را یک بازپرمایش جهت‌برگردان می‌نامند. برای بازپرمایش‌های جهت‌نگهدار، قائم واحد قراردادی تغییر نمی‌کند، ولی برای بازپرمایش‌های جهت‌برگردان،  $\vec{n}$  وارونه می‌شود. پس در واقع یک رویه هموار در  $\mathbb{R}^3$  دو 'جهت' می‌پذیرد که با انتخاب جهت قائم واحد مشخص می‌شود.



## انتگرال روی خم و رویه (۱)

تاکنون مفهوم انتگرال فقط روی مجموعه‌های "مسطح" مطرح بوده است: یک بازه در  $\mathbb{R}$ ، یک ناحیه در صفحه و به طور کلی یک ناحیه توپر در  $\mathbb{R}^n$ . نمونه اشیاء خمیده، یک خم در  $\mathbb{R}^n$ ، یک رویه در  $\mathbb{R}^2$ ، یا یک مجموعه تراز یک تابع غیرخطی  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  است. مفهوم انتگرال روی اینگونه مجموعه‌ها کاربردهای اساسی هم در درون ریاضیات و هم در بیرون آن دارد. در باقیمانده درس مفهوم انتگرال روی خم‌ها و رویه‌ها محور اصلی بحث خواهد بود.

دو نوع انتگرال در اینجا مورد بحث قرار خواهد گرفت. نوع اول که به 'انتگرال چگالی' معروف است برای خم  $\gamma$  به  $\int_{\gamma} f ds$  و برای رویه  $\varphi$  به  $\int_{\varphi} f dS$  نمایش داده خواهد شد. در اینجا  $f$  تابعی است، معمولاً پیوسته، که روی تصویر خم یا رویه تعریف شده است. در حالتی که  $f$  مثبت باشد، اگر آن را به چگالی تصویر خم یا تصویر رویه تعبیر کنیم، مقدار انتگرال مربوط برابر جرم تصویر خواهد بود. مقدار این انتگرال به جهت خم یا رویه بستگی ندارد. نوع دوم انتگرال، که محور اصلی بحث‌های بعدی خواهد بود، 'انتگرال یک میدان برداری'، یا 'انتگرال یک فرم دیفرانسیل' نام دارد و با تعویض جهت یا رویه مقدار آن تغییر علامت می‌دهد.

(۳۶-۱) انتگرال چگالی روی خم یک خم هموار  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  در نظر بگیرید و فرض کنید  $f$  تابعی با مقدار حقیقی است که دامنه آن شامل تصویر  $\gamma$  می‌باشد. معمولاً با  $f$  پیوسته سروکار داریم. طبق معمول پارامتر طول خم را به  $s$  نمایش می‌دهیم. تعریف می‌کنیم:

$$\int_{\gamma} f ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \frac{ds}{dt} dt \quad (1)$$

طرف چپ این تعریف به پارامتر خاص  $t$  بستگی ندارد ولی طرف راست ظاهراً به  $t$  وابسته است. برای این که این تعریف معنی داشته باشد، باید نحوه وابستگی سمت راست به پارامتر  $t$  را بررسی کنیم.

فرض کنید  $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$  یک بازپرمایش  $\gamma$  را تعریف کند،  $t = \varphi(\tau)$  داریم:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(\gamma(t)) \frac{ds}{dt} dt &= \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} (f \circ \gamma)(\varphi(\tau)) \frac{ds}{dt}(\varphi(\tau)) \frac{dt}{d\tau} d\tau \\ &= \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} (f \circ \gamma)(\varphi(\tau)) \frac{ds}{d\tau} d\tau \end{aligned}$$

اگر  $\varphi$  جهت‌نگهدار باشد، داریم  $\varphi^{-1}(a) = \alpha$  و  $\varphi^{-1}(b) = \beta$  پس عبارت سمت راست برابر  $\int_{\alpha}^{\beta} f((\gamma \circ \varphi)(\tau)) \frac{ds}{d\tau} d\tau$  می‌شود. اگر  $\varphi$  جهت برگردان باشد،  $\varphi^{-1}(a) = \beta$  و  $\varphi^{-1}(b) = \alpha$  و در نتیجه عبارت سمت راست برابر می‌شود با  $-\int_{\alpha}^{\beta} f((\gamma \circ \varphi)(\tau)) \frac{ds}{d\tau} d\tau$  که در اینجا  $s$  پارامتر طول خمیده اولیه یعنی  $\gamma$  است. اگر پارامتر طول خم معکوس را به  $\bar{s}$  نمایش دهیم، داریم  $\frac{d\bar{s}}{dt} = -\frac{ds}{dt}$ ، پس مجدداً مقدار انتگرال نسبت به پارامتر جدید، یعنی  $\int_{\alpha}^{\beta} f((\gamma \circ \varphi)(t)) \frac{d\bar{s}}{dt} dt$  همان مقدار سابق است. برای  $\int_{\gamma} f ds$  دو تعبیر زیر را مطرح می‌کنیم.

(۳۶-۱-۱) فرض کنید  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  یک‌به‌یک باشد. اگر  $f$  تابعی مثبت باشد و تصویر  $\gamma$  را یک مفتول نازک به چگالی  $f(\gamma(t))$  در نقطهٔ متناظر با  $t$  فرض کنیم،  $\int_{\gamma} f ds$  جرم کل مفتول تلقی می‌شود.

(۳۶-۱-۲) در حالت خاصی که تصویر خم یک‌به‌یک  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  در یک صفحه مسطح  $P$  قرار گیرد، و  $f$  مثبت باشد، می‌توان به  $\int_{\gamma} f ds$  یک تعبیر مساحت به صورت زیر نسبت داد. روی تصویر خم  $\gamma$  و عمود بر صفحه  $P$ ، در هر نقطه  $\gamma(t)$  عمودی در یک طرف صفحه به ارتفاع  $f(\gamma(t))$  در نظر بگیرید. این پاره‌خط‌های عمود رویه‌ای عمود بر  $P$  می‌سازند که مساحت آن برابر  $\int_{\gamma} f ds$  است (شکل ۱).

شکل ۱

مثال مساحت سطح جانبی جسمی را که از تقاطع دو استوانه  $x^2 + y^2 = 1$  و  $x^2 + z^2 = 1$  ساخته می‌شود محاسبه کنید.

حل قبلاً حجم داخل این جسم را محاسبه کرده‌ایم. سطح جانبی این جسم از دو قسمت متساوی تشکیل شده است که یک بخش آن روی دایرهٔ  $x^2 + y^2 = 1$  ساخته شده و متشکل از پاره‌خط‌هایی

است که روی استوانه  $x^2 + y^2 = 1$  قرار دارند و توسط  $x^2 + z^2 = 1$  بریده شده‌اند. روی نقطه  $(x, y, 0)$  از دایره  $x^2 + y^2 = 1$ ، این پاره‌خط با  $-\sqrt{1-x^2} \leq z \leq \sqrt{1-x^2}$  مشخص می‌شود که طول آن  $2\sqrt{1-x^2}$  است. بنابراین تقارن، بخش دیگر سطح جانبی نیز وضعیت مشابه دارد (با تعویض نقش  $y$  و  $z$ ). بدین ترتیب:

$$\text{سطح جانبی} = 2 \times \int_{\gamma} 2\sqrt{1-x^2} ds$$

که در اینجا  $\gamma$  دایره  $x^2 + y^2 = 1$  را نمایش می‌دهد که یک بار در جهت مثلثاتی طی شده است. با استفاده از پرمایش  $x = \cos t, y = \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi, ds = dt$  داریم:

$$\text{سطح جانبی} = 4 \times \int_0^{2\pi} |\sin t| dt = 8 \times \int_0^{\pi} \sin t dt = 16$$

(۳۶-۱) انتگرال چگالی روی رویه فرض کنید  $\varphi: W \rightarrow \mathbb{R}^3$  یک رویه هموار باشد

و  $\vec{r} = \varphi(u, v)$  یک ناحیه مجاز انتگرال‌گیری در صفحه  $(u, v)$ . اگر  $f$  تابعی با مقدار حقیقی باشد که دامنه آن شامل  $\varphi(W)$  است، انتگرال  $\int_{\varphi} f dS$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\int_{\varphi} f dS = \int_W \int f(\varphi(u, v)) |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| dudv \quad (2)$$

برای اینکه طرف راست (۲) وجود داشته باشد، تابع  $f \circ \varphi$  باید روی ناحیه مجاز  $W$  انتگرال‌پذیر باشد. اگر  $f$  پیوسته باشد، ترکیب  $f \circ \varphi$  نیز پیوسته است،  $|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|$  نیز پیوسته می‌باشد زیرا که مشتقات پاره‌ای  $\varphi$  نسبت به  $u$  و  $v$  پیوسته فرض شده‌اند، پس انتگرال طرف راست وجود دارد.

اکنون به کمک قاعده زنجیره‌ای و فرمول تعویض متغیر انتگرال دوگانه نشان می‌دهیم که طرف راست (۲) تحت بازپرمایش پا برجا می‌ماند. فرض کنید  $\Psi: W' \rightarrow W$  تابعی یک‌به‌یک و  $C^1$  از ناحیه مجاز انتگرال‌گیری  $W'$  به  $W$  است به طوری که دترمینان ماتریس ژاکوبی  $\Psi$  همه جا ناصفر است. نقطه  $w' = (u', v')$  را به  $w = (x, y, z)$  نمایش می‌دهیم و می‌نویسیم  $\vec{r} = (x, y, z)$ . از قاعده زنجیره‌ای داریم:

$$\begin{bmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{u'} & y_{v'} \\ z_{u'} & z_{v'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'_u & u'_v \\ v'_u & v'_v \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{u'} & z_{v'} \\ x_{u'} & x_{v'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'_u & u'_v \\ v'_u & v'_v \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{u'} & x_{v'} \\ y_{u'} & y_{v'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'_u & u'_v \\ v'_u & v'_v \end{bmatrix} \quad (5)$$

با توجه به اینکه دترمینان تمرینهای طرف چپ مؤلفه‌های  $\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v$  و دترمینان ماتریسهای سمت چپ طرف راست مؤلفه‌های  $\vec{r}'_{u'} \times \vec{r}'_{v'}$  هستند، داریم

$$|\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v| = |\vec{r}'_{u'} \times \vec{r}'_{v'}| \cdot \left| \det \frac{\partial(u', v')}{\partial(u, v)} \right| \quad (6)$$

با جایگزینی (6) در (2) و با استفاده از فرمول تعویض متغیر نتیجه می‌شود که:

$$\int_W \int f(\varphi(u, v)) |\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v| du dv = \int_{W'} \int f(\varphi \circ \Psi(u', v')) |\vec{r}'_{u'} \times \vec{r}'_{v'}| du' dv'$$

پس تعریف (2) تحت بازپرمایش تغییر نمی‌کند.

تعبیر جرم و چگالی در اینجا نیز مطرح می‌شود. اگر  $\varphi$  یک‌به‌یک باشد و به ازای هر  $(u, v) \in W$ ،  $f(\varphi(u, v)) > 0$  چگالی رویه در نقطه  $\varphi(u, v)$  تلقی شود، طبیعی است که مقدار  $\int_\varphi f dS$  را جرم کل  $\varphi(W)$  تلقی کنیم. مفهوم مرکز ثقل یک مفتول نازک (تصویر یک خم) و مرکز ثقل یک پیوسته نازک (تصویر یک رویه) را نیز اکنون می‌توان به شیوه معمول تعریف کرد. برای خم  $\gamma: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  و رویه  $\varphi: W \rightarrow \mathbb{R}^3$  چگالی را به  $\delta$  نمایش می‌دهیم. مختصات مرکز ثقل،  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  به صورت زیر تعریف می‌شوند:

برای خم  $\gamma$ :

$$\bar{x} = \frac{\int_\gamma x \delta ds}{\int_\gamma \delta ds}, \quad \bar{y} = \frac{\int_\gamma y \delta ds}{\int_\gamma \delta ds}, \quad \bar{z} = \frac{\int_\gamma z \delta ds}{\int_\gamma \delta ds} \quad (7)$$

و برای رویه  $\varphi$ :

$$\bar{x} = \frac{\int_\gamma \int y \delta dS}{\int_\gamma \int \delta dS}, \quad \bar{y} = \frac{\int_\gamma \int x \delta dS}{\int_\gamma \int \delta dS}, \quad \bar{z} = \frac{\int_\gamma \int z \delta dS}{\int_\gamma \int \delta dS} \quad (8)$$

در (۸) و (۹) مخرجها جرم کل را بیان می‌کنند. در حالتی که  $\delta$  ثابت باشد (چگالی یکنواخت)،  $\delta$  از صورت و مخرج حذف می‌شود و مرکز هندسی تصویر خم با تصویر رویه به دست می‌آید.  
مثال مختصات مرکز نیمکره  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ ،  $z \geq 0$  را به دست آورید وقتی این نیمکره از ماده‌ای با چگالی یکنواخت ساخته شده باشد.

از تقارن کره واضح است که  $\bar{x} = \bar{y} = 0$ . برای محاسبه  $\bar{z}$  از (۹) استفاده می‌کنیم. پس از حذف کردن  $\delta$  از صورت و مخرج کسر، مخرج عبارت  $\bar{z}$  برابر مساحت نیمکره یعنی  $2\pi R^2$  خواهد شد. نیمکره را طبق مثال ۲، بخش ۳۵، پرمایش می‌کنیم که در آن  $dS = R^2 \sin u \, du \, dv$ . پس

$$\begin{aligned} \int_{\varphi} \int z \, dS &= \int \int R^3 \cos u \sin u \, du \, dv \\ &= (2\pi) R^3 \left(\frac{1}{2}\right) \sin^2 u \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \pi R^3 \end{aligned}$$

بنابراین  $\bar{z} = \frac{R}{4}$ .

برای معرفی انتگرالهای روی خم و رویه از نوع دوم لازم است که نخست کلیاتی را در مورد 'میدانهای برداری' مطرح کنیم. اگر  $U$  زیرمجموعه‌ای از  $\mathbb{R}^n$  باشد و  $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  یک تابع، به  $F$  یک میدان برداری نیز می‌گویند. معمولاً وقتی اصطلاح میدان برداری به کار می‌رود تجسمی بدین صورت مورد نظر است که بردار  $F(x)$  را به مبدأ نقطه  $x$  رسم می‌کنیم و کلمه "میدان" یک توزیع پیکان‌ها در نقاط مختلف  $U$  را تداعی می‌کند. با این تعبیر، معمولاً برای تأکید برداری بودن مقدار  $F(x)$ ، به جای  $F$  از  $\vec{F}$  استفاده می‌کنیم.

### شکل ۲

در  $\mathbb{R}^3$ ، میدان‌های پایه  $\vec{i}$ ،  $\vec{j}$  و  $\vec{k}$  به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\vec{i}(x, y, z) = (1, 0, 0) \quad , \quad \vec{j}(x, y, z) = (0, 1, 0) \quad , \quad \vec{k}(x, y, z) = (0, 0, 1) \quad (9)$$

بدین ترتیب میدان دلخواه  $\vec{F}(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$  را می‌توان به صورت  $\vec{F} = F_1 \vec{i} + F_2 \vec{j} + F_3 \vec{k}$  نمایش داد. برقراری صفاتی مانند پیوستگی و مشتق‌پذیری برای  $\vec{F}$  معادل برقراری این صفات برای هر سه مؤلفه است.

### شکل ۳

به همین ترتیب در  $\mathbb{R}^n$ ، میدان‌های پایه  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$  به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\vec{e}_j(x_1, \dots, x_n) = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

که در اینجا درایه ۱ در مکان  $j$ -ام است. هر میدان  $\vec{F} = (F_1, \dots, F_n)$  را می‌توان به صورت  $\vec{F}(x) = \sum_{i=1}^n F_i(x) \vec{e}_i$  نوشت.

یک مفهوم اساسی در رابطه با میدان برداری، مفهوم "خم انتگرال" است. اگر  $F$  یک میدان برداری تعریف شده روی زیرمجموعه  $U$  از  $\mathbb{R}^n$  باشد، مقصود از یک خم انتگرال (یا خط میدان) برای  $\vec{F}$ ، خمی مشتق‌پذیر  $\gamma: I \rightarrow U$  است که  $\gamma'(t) = \vec{F}(\gamma(t))$  به‌ازای هر  $t$  در  $I$ . بدین ترتیب تصویر خم انتگرال طوری قرار می‌گیرد که بردار سرعت آن همواره منطبق بر بردار میدان داده شده است. پس خم‌های انتگرال در واقع جواب‌های دستگاه معادله دیفرانسیل زیر می‌شوند:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = F_1(x) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = F_n(x) \end{cases} \quad (10)$$

قضیه اساسی وجود و یگانگی جواب معادلات دیفرانسیل حکم می‌کند که اگر  $F_1, \dots, F_n$  دارای مشتق‌های پاره‌ای پیوسته باشند، از هر نقطه  $x$  در  $U$ ، خم انتگرال منحصر به فردی عبور می‌کند. در زیر به ذکر چند مثال در صفحه می‌پردازیم:

مثال ۱ میدان  $\vec{F}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j}$  را در نظر بگیرید. این میدان در مبدأ صفر است و در هر نقطه دیگر به اندازه بردار حامل از مبدأ به آن نقطه، از آن نقطه ساطع می‌کند. بدین ترتیب بردارهای میدان همه به دور از مبدأ اشاره می‌کنند. نقطه  $(0, 0)$  را در این صورت یک چشمه می‌نامند (شکل ۴، الف) خم‌های انتگرال این میدان نیم‌خط‌های راست هستند که می‌توان به صورت  $\gamma(t) = (x_0 e^t, y_0 e^t)$  نمایش داد. توجه کنید که  $\gamma(0) = (x_0, y_0)$  و  $\gamma(t) \rightarrow (0, 0)$  وقتی  $t \rightarrow -\infty$ .

مثال ۲ برای  $\vec{G}(x, y) = -x\vec{i} - y\vec{j}$  جهت میدان مثال ۱ وارونه می‌شود و میدان به سوی مبدأ اشاره می‌کند.  $(0, 0)$  را در این حالت یک چاهک می‌نامند. خم‌های انتگرال این میدان برداری را می‌توان به صورت  $\gamma(t) = (x_0 e^{-t}, y_0 e^{-t})$  نوشت.

مثال ۳ میدان  $\vec{R}(x, y) = (-y)\vec{i} + x\vec{j}$  را در نظر بگیرید. در نقطه  $(x, y)$ ، بردار میدان عمود بر بردار حامل است و در واقع از دوران  $\frac{\pi}{2}$  در جهت مثلثاتی حاصل می‌شود (شکل ۴، ب). خم انتگرال گذرا از نقطه  $(x_0, y_0) = (r_0 \cos \theta_0, r_0 \sin \theta_0)$  را می‌توان به صورت:

$$\gamma(t) = (r_0 \cos(\theta_0 + t), r_0 \sin(\theta_0 + t))$$

نوشت که تصویر آن یک دایره به شعاع  $r_0$  حول مبدأ است. در این حالت  $(0, 0)$  را یک مرکز می‌نامند.

مثال ۴ میدان  $\vec{S}(x, y) = x\vec{i} + (-y)\vec{j}$  را در نظر بگیرید. این میدان در شکل ۴، ج، نمایش داده شده است و خم انتگرال گذرا از  $(x_0, y_0)$  را می‌توان به  $\gamma(t) = (x_0 e^t, y_0 e^{-t})$  نمایش داد.

#### شکل ۴

که یک شاخهٔ هذلولی  $xy = x_0 y_0$  است. برای  $x_0 = 0, y_0 \neq 0$  و  $y_0 = 0, x_0 \neq 0$ ، نیم خط‌های مختصاتی به دست می‌آیند. نقطه  $(0, 0)$  را در اینجا یک نقطه زینی می‌نامند.

نوع مهمی از میدان برداری که قبلاً نیز به آن برخوردیم میدان گرادیان است. اگر  $U$  زیرمجموعه‌ای باز از  $\mathbb{R}^n$  باشد و  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  تابعی مشتق‌پذیر، گرادیان  $f$ ،  $\nabla f$ ، را به صورت زیر تعریف کرده‌ایم:

$$\nabla f(x) = \frac{\partial f}{\partial x_1} \vec{e}_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \vec{e}_n$$

تابع  $f$  را یک پتانسیل برای میدان  $\nabla f$  می‌نامیم و از آنجا که میدان گرادیان بر مجموعه‌های تراز عمود است، خم‌های انتگرال که بر میدان مماس هستند نیز بر مجموعه‌های تراز عمود خواهند شد. میدان‌های  $\vec{F}$ ،  $\vec{G}$  و  $\vec{S}$  در مثال‌های ۱، ۲ و ۴ میدان‌های گرادیان هستند با پتانسیل‌های به ترتیب

$f(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ ،  $g(x, y) = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2)$  و  $s(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$  برای  $f$  و  $g$ ، دوایر به مرکز مبدأ مجموعه‌های تراز هستند که بر نیم‌خط‌های مماس بر میدان عمودند. برای  $s$ ، هذلولی‌های ثابت  $x^2 - y^2 = \text{ثابت}$  مجموعه‌های تراز هستند که بر خانواده هذلولی‌های ثابت  $xy = \text{ثابت}$  عمود می‌باشند. نشان می‌دهیم میدان  $\vec{R}$  (مثال ۳) از نوع گرادیان نیست. فرض کنید تابعی  $r(x, y)$  وجود داشته باشد که  $\nabla r = \vec{R}$ ، یعنی  $\frac{\partial r}{\partial x} = -y$  و  $\frac{\partial r}{\partial y} = x$ . از آنجایی که تابع‌های  $(-y)$  و  $x$  خود مشتق‌پذیر با مشتق‌های پاره‌ای پیوسته‌اند، نتیجه می‌شود که  $r(x, y)$  باید دارای مشتق‌های پاره‌ای مرتبه دوم پیوسته باشد، پس  $\frac{\partial^2 r}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 r}{\partial y \partial x}$ ، که برقرار نیست زیرا  $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial r}{\partial y}) = 1$  و  $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial r}{\partial x}) = -1$ . این استدلال عمومیت دارد و منجر به شرط لازم زیر برای گرادیان بودن می‌شود:

(۳۶-۲) شرط لازم برای گرادیان بودن یک میدان فرض کنید میدان برداری  $\vec{F} = F_1 \vec{e}_1 + \dots + F_n \vec{e}_n$  که دارای مشتق‌های پاره‌ای پیوسته مرتبه اول است، گرادیان یک تابع باشد، در این صورت:

$$i, j = 1, \dots, n \quad \text{برای هر زوج} \quad \frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}$$

اگر  $f$  پتانسیل  $\vec{F}$  باشد، تساوی بالا همان  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$  است. میدان‌های برداری گرادیان را میدان‌های پایسته نیز می‌نامند.



## انتگرال روی خم و رویه (۲)

در بخش گذشته انتگرال چگالی روی خم و رویه را بررسی کردیم. اکنون به بررسی نوع دیگری انتگرال روی خم و رویه می‌پردازیم که به انتگرال یک میدان برداری یا انتگرال یک 'فرم دیفرانسیل' شهرت دارد. مقدار این انتگرال نیز تحت اثر بازپرمایش جهت نگهدار عوض نمی‌شود ولی تحت اثر بازپرمایش جهت برگردان تغییر علامت می‌دهد. بحث را از انتگرال روی خم آغاز می‌کنیم.

(۲۲-۱) انتگرال میدان برداری در طول خم فرض کنید  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  یک خم هموار است که گاهی آن راه به صورت  $\vec{r} = \gamma(t)$  می‌نویسیم و  $\vec{F} = (F_1, \dots, F_n)$  یک میدان برداری پیوسته که دامنه تعریف آن شامل تصویر خم  $\gamma$  در  $\mathbb{R}^n$  می‌باشد. انتگرال میدان  $F$  در امتداد خم  $\gamma$  که به نماد  $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$  نمایش داده می‌شود، به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma} (\vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{ds}) ds \quad (1)$$

بدین ترتیب  $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$  به یک انتگرال چگالی  $\int_{\gamma} f ds$  تبدیل می‌شود که در آن  $f = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{ds}$ . نکته تمایز این است که تحت تعویض متغیر جهت برگردان،  $\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{T}$  (مماس واحد) در  $(-1)$  ضرب می‌شود، پس  $f$  تغییر علامت می‌دهد و در نتیجه (۱) به جهت خم وابسته است. مقدار طرف راست (۱) را می‌توان عیناً به صورت انتگرال چگالی محاسبه کرد و با استفاده از قاعده زنجیره‌ای داریم:

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b (\vec{F}(\gamma(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}) dt \quad (2)$$

با توجه به اینکه  $\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{T}$  مماس واحد در جهت پرمایش خم  $\gamma$  است، تعبیر هندسی این انتگرال نیز مشهود است.  $\vec{F} \cdot \vec{T} = |\vec{F}| \cos(\vec{F}, \vec{T})$  مؤلفه  $\vec{F}$  در جهت  $\vec{T}$  است، پس در واقع  $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$  نمایانگر میزان انباشته شدن میدان  $\vec{F}$  در راستای حرکت روی  $\gamma$  است. در فیزیک، اگر  $\vec{F}$  یک میدان نیرو باشد

$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$  را "کار انجام شده" در امتداد  $\gamma$  می‌نامند. قبل از ارائه مثال و کاربردهای این نوع انتگرال، نمادگذاری دیگری را که نیز معمول است معرفی می‌کنیم. بردار  $\vec{r} = \gamma(t)$  در واقع مکان متحرک را در زمان  $t$  نشان می‌دهد. می‌نویسیم  $\vec{r} = (x_1, \dots, x_n)$  و در نتیجه  $\gamma'(t) = (\frac{dx_1}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt})$ . بنابراین (۲) به صورت زیر در می‌آید:

$$\int_a^b (F_1 \frac{dx_1}{dt} + \dots + F_n \frac{dx_n}{dt}) dt \quad (3)$$

چون تعویض پارامتر جهت نگهدار اثری بر مقدار انتگرال فوق ندارد، گاهی با حذف  $dt$  ها انتگرال  $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$  را به صورت زیر نیز می‌نویسند:

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma} F_1 dx_1 + \dots + F_n dx_n \quad (4)$$

مثال ۱ برای  $\vec{R}(x, y) = (-y)\vec{i} + x\vec{j}$  و  $\gamma$  دایره شعاع  $A$  به مرکز  $(0, 0)$  که یک بار در جهت مثلثاتی پیموده شده است،  $\int_{\gamma} \vec{R} \cdot d\vec{r}$  را محاسبه کنید.

حل داریم  $\vec{r} = \gamma(t) = (A \cos t, A \sin t)$ ،  $0 \leq t \leq 2\pi$  پس  $x = A \cos t$  و  $y = A \sin t$ . بدین ترتیب:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{R} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} (\vec{R} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}) dt \\ &= \int_0^{2\pi} [(-A \sin t)(-A \sin t) + (A \cos t)(A \cos t)] dt \\ &= 2\pi A^2 \end{aligned}$$

لازم است که مفهوم انتگرال روی خم را به خم‌های "قطعه قطعه هموار" توسعه دهیم. خم پیوسته  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  را قطعه قطعه هموار می‌نامیم در صورتی که افراز  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_p = b$  وجود داشته باشد که تحدید  $\gamma$  به دامنه  $[t_{i-1}, t_i]$ ، برای هر  $i = 1, \dots, n$  یک خم هموار تعریف کند. بدین ترتیب  $\gamma$  ممکن است در  $\gamma(t_i)$  "گوشه" داشته باشد زیرا که مماس چپ  $\vec{T}(t_i)^-$  و مماس راست  $\vec{T}(t_i)^+$  ممکن است بر هم منطبق نباشند. برای خم قطعه قطعه هموار فوق،  $\int_{\gamma} f ds$  را برابر مجموع  $\sum_{i=1}^p \int_{\gamma_i} f ds$  تعریف می‌کنیم در آن تحدید  $\gamma_i$  به  $[t_{i-1}, t_i]$  است.

مثال ۲ اگر  $\vec{R}$  مانند مثال قبل باشد،  $\int_{\gamma} \vec{R} \cdot d\vec{r}$  را برای  $\gamma$ : مربع با رئوس  $(\pm A, \pm A)$  یک بار پیموده شده در جهت مثلثاتی، محاسبه کنید.

حل

شکل ۵

خم‌های  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$  چهار ضلع مربع را طبق شکل توصیف می‌کنند. باید  $\sum_{i=1}^4 \int_{\gamma_i} \vec{R} \cdot d\vec{r}$  را محاسبه کنیم. خم‌ها را می‌توان به شکل زیر توصیف کرد

$$\begin{cases} \gamma_1(t) = (A, t), & -A \leq t \leq A \\ \gamma_2(t) = (-t, A), & -A \leq t \leq A \\ \gamma_3(t) = (-A, -t), & -A \leq t \leq A \\ \gamma_4(t) = (t, -A), & -A \leq t \leq A \end{cases}$$

پس

$$\int_{\gamma_1} \vec{R} \cdot d\vec{r} = \int_{-A}^A [(-t, A) \cdot (0, 1)] dt = \int_{-A}^A A dt = 2A^2$$

$$\int_{\gamma_2} \vec{R} \cdot d\vec{r} = \int_{-A}^A [(-A, -t) \cdot (-1, 0)] dt = \int_{-A}^A A dt = 2A^2$$

به همین ترتیب انتگرال‌های روی  $\gamma_3$  و  $\gamma_4$  نیز هر یک برابر  $2A^2$  خواهند شد و  $\int_{\gamma} \vec{R} \cdot d\vec{r}$  برابر  $8A^2$  می‌شود.

توجه کنید که در این مثال و مثال قبل  $\int_{\gamma} -y dx + x dy$  دو برابر مساحت محصور شده توسط  $\gamma$  درآمد. این یک واقعیت کلی است که بعداً به دلیل آن پی خواهیم برد.

در ادامه بحث، انتگرال‌های روی خم  $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$  را برای میدان‌های پایسته  $\vec{F}$  بررسی می‌کنیم. فرض کنید  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  یک خم هموار باشد با نقطه آغازی  $\gamma(a) = A$  و نقطه پایانی  $\gamma(b) = B$ .

و  $\vec{F} = \nabla f$  برای تابع مشتق‌پذیر  $f$ . در این صورت:

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_a^b \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} \right) dt \\ &= \int_a^b (f \circ \gamma)'(t) dt \\ &= f(B) - f(A)\end{aligned}$$

یعنی مقدار  $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ ، مستقل از مسیر هموار  $\gamma$ ، برابر اختلاف پتانسیل در دو انتهای مسیر است. این مطلب را می‌توان به خم‌های پیوسته قطعه قطعه هموار  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  نیز تعمیم داد زیرا که اگر  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_p = b$  افزایش دهیم، آنگاه بنا بر پیوستگی خم،  $\gamma_i(t_i) = \gamma_{i+1}(t_i)$  و در نتیجه:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^p \int_{\gamma_i} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \sum_{i=1}^p (f(\gamma_i(t_i)) - f(\gamma_i(t_{i-1}))) \\ &= f(\gamma_p(b)) - f(\gamma_1(a))\end{aligned}$$

نکته مهم این که این ویژگی مختص میدان‌های پایسته است.

(۲-۳۷) قضیه فرض کنید  $U$  یک مجموعه باز و همبند مسیری در  $\mathbb{R}^n$  باشد و  $\vec{F}$  یک میدان پیوسته تعریف شده در  $U$ . در این صورت  $\vec{F}$  پایسته است اگر و تنها اگر  $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$  مستقل از مسیر باشد، یعنی برای هر دو خم قطعه قطعه هموار  $\alpha$  و  $\beta$  در  $U$  با نقاط آغازی و پایانی مشترک، داشته باشیم

$$\int_{\alpha} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\beta} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

اثبات لزوم این شرط را در بالا دیدیم. حال فرض کنید شرط استقلال از مسیر برقرار باشد، می‌خواهیم وجود پتانسیل برای میدان  $\vec{F}$  را ثابت کنیم. نقطه‌ای  $P$  را در  $U$  به عنوان نقطه مرجع تثبیت می‌کنیم. تابعی  $f$  روی  $U$  تعریف می‌کنیم که  $\nabla f = \vec{F}$ .

شکل ۱

برای نقطه دلخواه  $Q$ ،  $f(Q)$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم. از آنجا که  $U$  همبند مسیری و باز است، مسیری قطعه قطعه هموار از  $P$  به  $Q$  وجود دارد، و به سبب شرط استقلال از مسیر،  $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$  برای هر

مسیر قطعه قطعه هموار از  $P$  به  $Q$  یک مقدار را دارد، پس با انتخاب یک چنین مسیر  $\gamma$ ، می‌توان تعریف کرد:

$$f(Q) = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

باید نشان دهیم  $f$  پتانسیل مورد نظر است، یعنی  $\frac{\partial f}{\partial x_i} = F_i$ ، که  $F_i$  مؤلفه  $i$ -ام  $\vec{F}$  است. به این منظور از  $Q$  پاره‌خط راستی به موازات محور  $x_i$  رسم می‌کنیم که در  $U$  بماند و آن را به صورت زیر پارامتری می‌کنیم:

$$\lambda(t) = Q + te_i, \quad 0 \leq t \leq h$$

نقطه  $Q_h = Q + he_i$ ، نقطه پایانی مسیری است که از  $P$  شروع می‌شود، نخست تصویر  $\gamma$  را می‌پیماید و سپس تصویر  $\lambda$  را. این مسیر را، که قطعه قطعه هموار است، به  $\gamma * \lambda$  نمایش می‌دهیم. طبق تعریف:

$$f(Q_h) = \int_{\gamma * \lambda} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\lambda} \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(Q) + \int_0^h F_i(\lambda(t)) dt$$

(توجه کنید که غیر از مؤلفه  $i$ -ام، سایر مؤلفه‌های  $\lambda$  ثابت هستند) بنابراین:

$$\frac{f(Q_h) - f(Q)}{h} = \frac{1}{h} \int_0^h F_i(\lambda(t)) dt$$

بنابراین قضیه میانگین انتگرال، انتگرال سمت راست برابر است با  $h \cdot F_i(Q^*)$  که  $Q^*$  نقطه‌ای روی پاره‌خط  $\lambda$  است. بدین ترتیب  $\frac{f(Q_h) - f(Q)}{h} = F_i(Q^*)$ . وقتی  $h \rightarrow 0$  به  $Q$  میل می‌کند و در نتیجه  $Q^*$  که روی پاره‌خط واصل قرار دارد نیز به  $Q$  میل می‌کند. طبق پیوستگی  $F_i$ ، سمت راست به  $F_i(Q)$  میل می‌کند و ثابت می‌شود که  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(Q) = F_i(Q)$ . ■

مثال ۳ میدان  $\vec{F}$  روی  $\mathbb{R}^n - \{0\}$  به صورت زیر تعریف شده است:

$$\vec{F}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{x_1^2 + \dots + x_n^2} \vec{e}_i$$

اگر  $P$  و  $Q$  دو نقطه به فواصل  $|P|$  و  $|Q|$  از  $0$  باشند و  $\gamma$  یک خم قطعه قطعه هموار در  $\mathbb{R}^n - \{0\}$  با نقطه آغازی  $P$  و نقطه پایانی  $Q$ ، ادعا می‌کنیم  $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \ln \frac{|Q|}{|P|}$ . بالاخص اگر  $P$  و  $Q$  هم فاصله از

باشد، داریم  $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ . در اینجا می‌توان به سادگی حدس زد و تحقیق نمود که میدان  $\vec{F}$  دارای پتانسیل  $f(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{2} \ln(x_1^2 + \dots + x_n^2)$  است و حکم فوراً نتیجه می‌شود.

مثال ۴ میدان  $\vec{F}$  در  $\mathbb{R}^2 - \{0\}$  را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\vec{F}(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} \vec{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \vec{j}$$

آیا این میدان پایسته است؟ توجه کنید که استقلال از مسیر برای انتگرال میدان‌های پایسته نتیجه می‌دهد که انتگرال حول یک مسیر بسته قطعه قطعه هموار باید صفر شود. اگر معلوم شود که  $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$  برای یک مسیر قطعه قطعه هموار بسته صفر نیست،  $\vec{F}$  نمی‌تواند پایسته باشد.  $\gamma$  را دایره‌ای به شعاع  $R$  به مرکز  $0$  یک بار پیموده شده در جهت مثلثاتی می‌گیریم:

$$\gamma(t) = (R \cos t, R \sin t) \quad , \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} \left[ \frac{-R \sin t}{R^2} (-R \sin t) + \frac{R \cos t}{R^2} (R \cos t) \right] dt \\ &= \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi \neq 0 \end{aligned}$$

بدین ترتیب  $\vec{F}$  پایسته نیست. ضمناً توجه کنید که نتیجه انتگرال‌گیری به شعاع  $R$  بستگی ندارد، این مطلب بعداً بررسی خواهد شد.

مثال را بالا نباید به همین صورت (فقدان پتانسیل) رها کرد. توجه کنید که این میدان بر بردار حامل از  $0$  به نقطه  $(x, y)$  عمود است، بنابراین بر نیم خط (ثابت  $\theta$ ) عمود می‌باشد. به نظر می‌آید که باید پتانسیلی برای این میدان وجود داشته باشد که مجموعه‌های تراز آن نیم‌خط‌های ثابت  $\theta$  باشند.

در واقع با در نظر گرفتن  $f(x, y) = \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$  داریم:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-\frac{y}{x^2}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

یعنی، علی‌رغم آنچه ثابت شد، ظاهراً پتانسیلی برای این میدان موجود است. اشکالی که فوراً به ذهن می‌رسد این است که  $\frac{y}{x}$  روی محور  $y$  تعریف نشده و  $\tan^{-1}(\frac{y}{x})$  نمی‌تواند معنی داشته باشد. ولیکن با قرار دادن  $\theta = \frac{\pi}{4}$  روی نیم‌خط بالای محور  $y$  و  $\theta = \frac{3\pi}{4}$  روی نیم‌خط پایین به نظر می‌آید که مشکل حل شود چون  $\theta$  چیزی جز مختصه قطبی زاویه نیست. مشکل واقعی در اینجا “چند مقداری بودن”  $\theta$  است. توجه کنید که اگر نیم‌خط مثبت محور  $x$  را با  $\theta = 0$  مشخص کنیم و یک دور کامل

### شکل ۲

دور مبداء گردش کنیم در حالی که تابع  $\theta$  به طور پیوسته تغییر کند، آنگاه در بازگشت به نیمه راست محور  $x$ ، مقدار  $\theta$  به  $(2\pi)$  می‌رسد، نه صفر! جالب اینجاست که این مقدار  $2\pi$  در واقع مقداری است که برای انتگرال مثال قبل به دست آورده‌ایم و این امر تصادفی نیست. در واقع به اعتباری، نوعی “پتانسیل چند مقداری” برای  $\vec{F}$  وجود دارد که  $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$  همچنان برابر اختلاف پتانسیل بین دو سر مسیر خواهد بود. کار کردن با این پتانسیل‌ها دقت می‌طلبد و بررسی دقیق آنها از کار این درس خارج است. موضع رسمی ما در مورد این میدان همچنان فقدان پتانسیل خواهد بود. پس از مطالعه قضیه گرین در جلسه بعد، به نحو مؤثرتری از این میدان استفاده خواهیم کرد. بالاخص خواهیم دید که  $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ ، همچنان که با توجه به  $\theta$  انتظار داریم، برابر  $2\pi k$  خواهد بود که  $k$  تعداد دفعات گردش مسیر  $\gamma$  حول  $\underline{0}$  در جهت مثلثاتی است.

بالاخره در مورد مثال بالا ذکر این نکته نیز لازم است که چنانچه یک نیم‌خط کامل ساطع از  $\underline{0}$  را از  $\mathbb{R}^2$  حذف کنیم، تابع  $\theta$  بدون ابهام به عنوان یک تابع مشتق‌پذیر روی باقیمانده صفحه قابل تعریف است زیرا در این ناحیه امکان گردش دور  $\underline{0}$  و بازگشت به نقطه آغازی وجود ندارد. مثلاً با حذف  $\theta = \theta_0$  و تعریف کردن  $\theta_0 + 2\pi < \theta < \theta_0$  برای باقیمانده صفحه،  $\theta$  تابعی مشتق‌پذیر در دامنه خود خواهد شد. تحدید  $\vec{F}$  به چنین ناحیه‌ای پایسته است و  $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$  برای هر مسیر بسته کاملاً واقع شده در این ناحیه صفر است (شکل ۳).

### شکل ۳

## انتگرال روی خم و رویه (۳)

در ادامه بحث انتگرال روی اجسام خمیده، اکنون مفهوم انتگرال یک میدان برداری 'یا فرم دیفرانسیل' را روی رویه بررسی می‌کنیم. فرض کنید  $\varphi: W \rightarrow \mathbb{R}^3$ ،  $\vec{r} = \varphi(u, v)$ ، یک رویه هموار باشد و  $W$  یک ناحیه مجاز انتگرالگیری در  $\mathbb{R}^2$ . طبق معمول نقاط  $W$  را به  $W = (u, v)$ ، عنصر سطح  $dS = |\varphi_u \times \varphi_v| du dv$ ، و قائم واحد قراردادی  $\frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|}$  را به  $\vec{n}$  نمایش می‌دهیم. گاهی  $d\vec{S} = (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) du dv = \vec{n} dS$  را به  $d\vec{S}$  نیز نمایش می‌دهند. فرض کنید  $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$  یک میدان برداری پیوسته باشد که دامنه آن شامل تصویر  $\varphi$ ، یعنی  $\varphi(W)$ ، است. در این صورت تعریف می‌کنیم:

$$\int \int_{\varphi} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int \int_{\varphi} (\vec{F} \cdot \vec{n}) dS \quad (1)$$

توجه کنید به ازای هر  $(u, v) \in W$ ،  $\vec{n}((u, v)) = \vec{n}(\varphi(u, v))$  تعریف شده است، پس طرف راست بالا یک انتگرال چگالی به مفهوم عادی می‌باشد. از طرفی دیگر چون  $\vec{n}$  معرف جهت رویه است،  $\vec{F} \cdot \vec{n}$  تحت تعویض متغیر جهت برگردان تغییر علامت می‌دهد، پس (۱) نیز تحت تعویض متغیر جهت برگردان تغییر علامت می‌دهد.

تعبیر فیزیکی زیر در مورد انتگرال (۱) منشاء کاربردهای بسیاری است.  $\vec{F}$  را یک میدان نیرو فرض کنید و  $\varphi(W)$  را یک لایه بسیار نزدیک در فضای سه بعدی تصور کنید که در معرض این نیرو قرار دارد. مقدار  $\vec{F} \cdot \vec{n}$  برابر مؤلفه  $\vec{F}$  در جهت عمود قراردادی بر لایه است. انتگرال  $\vec{F} \cdot \vec{n}$  نسبت به  $dS$  روی این لایه نمایشگر کل شار گذرا از لایه محسوب می‌شود.

مثال ۱ میدان واحد قائم  $\vec{F} = \vec{k}$  در  $\mathbb{R}^3$  را در نظر بگیرید. شار گذرا از نیمکره  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ ،  $z \geq 0$ ، را محاسبه کنید اگر قائم واحد  $\vec{n}$  با مؤلفه سوم مثبت برای نیمکره منظور شود.



در نقطه  $(x, y, z)$  از نیمکره داریم  $\vec{n} = (\frac{x}{R}, \frac{y}{R}, \frac{z}{R})$ ، باید نماد دیگر  $\vec{n} = \frac{x}{R}\vec{i} + \frac{y}{R}\vec{j} + \frac{z}{R}\vec{k}$  پس  $\vec{n} = \frac{x}{R}\vec{i} + \frac{y}{R}\vec{j} + \frac{z}{R}\vec{k}$  را به انتگرال  $\iint \frac{z}{R} dS$  را روی نیمکره محاسبه کنیم. در مختصات کروی داریم:

$$z = R \cos \varphi$$

$$dS = R^2 \sin \varphi d\varphi d\theta$$

پس

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \varphi) (R^2 \sin \varphi) d\varphi d\theta &= (2\pi R^2) \left(\frac{1}{\varphi}\right) \sin^2 \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \pi R^2 \end{aligned}$$

عبارت داخل انتگرال در طرف راست (۱) را می توان به صورتهای دیگری نیز بازنویسی کرد. از آنجا

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|} \text{ که داریم}$$

$$\vec{n} dS = (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) dudv \quad (2)$$

پس

$$\int_{\varphi} \int \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_W \int \vec{F} \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) dudv \quad (3)$$

حال اگر بنویسیم  $\vec{r} = (x, y, z)$ ، داریم

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

که طبق معمول مقصود از نماد  $y_u$  مشتق پاره‌ای  $y$  نسبت به  $u$ ، یعنی  $\frac{\partial y}{\partial u}$ ، است و به همین ترتیب برای سایر درایه‌های دترمینان‌های بالا. پس برای  $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$  نتیجه می شود که:

$$\int_{\varphi} \int \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_W \int \left[ F_1 \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix} + F_2 \begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix} + F_3 \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \right] dudv \quad (4)$$

طرف راست (۴) روش محاسبه صریح این نوع انتگرال را برحسب پرمایش  $\varphi$  عرضه می کند. از آنجا که تحت تعویض پارامتر جهت نگهدار مقدار این انتگرال تغییر نمی کند، مطلوب است که عبارت سمت راست (۴) به صورتی مستقل از پارامترهای خاص  $(u, v)$  نوشته شود. توجه کنید که دترمینان

$$\begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix} \text{ دترمینان ماتریس مشتقهای } y \text{ و } z \text{ نسبت به } u \text{ و } v \text{ است. به جای } dudv \text{ گاهی}$$

می‌نویسیم  $dydz$ . و به همین ترتیب  $dzdx$  و  $dx dy$  (به ترتیب توجه کنید) را جایگزین عبارتهای متناظر کرده و (۴) را به صورت زیر نیز می‌نویسیم:

$$\int_{\varphi(W)} \int \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_{\varphi} \int F_1 dydz + F_2 dzdx + F_3 dx dy \quad (5)$$

مقصود از عبارت سمت راست این است که نسبت به هر پرمایش مجاز  $\varphi$  با جایگزین مناسب برای  $dydz$ ،  $dzdx$  و  $dx dy$  برحسب پارامترهای ذیربط می‌توان انتگرال را محاسبه کرد.

مثال ۲ انتگرال مثال (۱) را به روش دیگری محاسبه می‌کنیم. داریم  $F_1 = F_2 = 0$  و  $F_3 = 1$ ، پس برای نیمکره شمالی  $H$ ، به شعاع  $R$ ، داریم:

$$\int_H \int \vec{k} \cdot d\vec{S} = \int_H \int (1) dx dy$$

حال می‌توان نیمکره شمالی را به صورت نمودار تابعی برحسب  $x$  و  $y$  یعنی  $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$  پرمایش کرد که ضمناً دیده‌ایم مؤلفه سوم  $\vec{r}_x \times \vec{r}_y$  همواره مثبت است پس جهت روبه منظور شده در مثال (۱) را دارد. پس:

$$\int_H \int dx dy = \int_{x^2 + y^2 \leq R^2} \int dx dy = \pi R^2$$

در باقیمانده این بخش دو مفهوم 'دیورژانس' و 'چرخه' را معرفی می‌کنیم که همراه با گرادیان نقش اساسی در قضایای مهم انتگرال روی خمها و رویه‌ها دارند. فرض کنید  $U$  زیرمجموعه‌ای باز از  $\mathbb{R}^n$  است و  $\vec{F} = (F_1, \dots, F_n)$  یک میدان برداری  $C^1$  تعریف شده روی  $U$ . دیورژانس  $\vec{F}$ ، که به  $div \vec{F}$ ، نمایش داده می‌شود، تابع زیر است:

$$div \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \dots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \quad (6)$$

اگر  $\vec{F}$  تابعی از  $U$  به  $\mathbb{R}^n$  تصور کنیم،  $div \vec{F}$  در واقع مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس ژاکوبی  $\vec{F}$  است. مجموع عناصر قطری یک ماتریس مربعی، مانند دترمینان، از خواص مهمی برخوردار است. در بخشهای آینده خواهیم دید که دیورژانس  $\vec{F}$  نوعی شاخص وضعیت میدان  $\vec{F}$  از نظر انبساط یا انقباض

است. مثبت بودن  $\text{div} \vec{F}$  در یک نقطه نوعی انبساط حول آن نقطه، یا دور شدن پیکانه‌های میدان حول آن نقطه را نشان می‌دهد، و بالعکس منفی بودن  $\text{div} \vec{F}$  دال بر تقارب پیکانه‌ها یا انقباض است. بدین ترتیب دیورژانس به هر میدان برداری  $C^1$  روی  $U$  یک تابع پیوسته  $\text{div} \vec{F} : U \rightarrow \mathbb{R}$  نسبت می‌دهد، در حالی که گرادیان، به هر تابع  $C^1$ ،  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  یک میدان برداری پیوسته  $\text{grad} f = \nabla f$  روی  $U$  منسوب می‌کند.

در حالت  $n = 3$ ، یعنی وقتی که  $U$  زیرمجموعه‌ای از  $\mathbb{R}^3$  باشد، یک عملگر دیگر روی میدانهای برداری مجموعه گرادیان و دیورژانس را کامل می‌کند. این عملگر که چرخه نام دارد و به نمادهای  $\text{curl}$  یا  $\text{rot}$  نمایش داده می‌شود، به هر میدان برداری مشتقپذیر  $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$  روی  $U$  میدان دیگری به شکل زیر نسبت می‌دهد:

$$\text{curl} \vec{F} = \left( \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \quad (7)$$

در بخشهای آینده خواهیم دید که  $\text{curl} \vec{F}$  به اعتباری تقریب  $\vec{F}$  با یک میدان چرخشی است،  $|\text{curl} \vec{F}|$  مقدار چرخش و راستای  $\text{curl} \vec{F}$  (چنانچه  $\text{curl} \vec{F}$  صفر نباشد) محور این چرخش است. دو حکم کلیدی زیر ارتباط مهمی را میان سه عملگر  $\text{grad}$ ،  $\text{curl}$  و  $\text{div}$  بیان می‌کنند.

(۱-۳۸) الف) اگر  $f$  تابعی  $C^2$  باشد داریم:

$$\text{curl}(\text{grad} f) = \underline{\underline{0}} \quad (8)$$

ب) اگر  $\vec{F}$  یک میدان  $C^2$  باشد، داریم

$$\text{div}(\text{curl} \vec{F}) = 0 \quad (9)$$

برهان اثبات (۸) و (۹) سراسر است ولی مشاهده محاسبات لازم حایز اهمیت است:

$$\begin{aligned} \text{curl}(\text{grad} f) &= \text{curl} \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \\ &= \left( \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) \end{aligned}$$

از آنجا که  $f$  تابعی  $C^2$ ، یعنی دارای مشتقهای پاره‌ای مرتبه دوم پیوسته، فرض شده است، هر سه مؤلفه بالا صفر هستند. به همین ترتیب داریم:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\operatorname{curl}\vec{F}) &= \operatorname{div}\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right) \\ &= \frac{\partial^2 F_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 F_z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 F_x}{\partial z \partial y} \end{aligned}$$

و در اینجا نیز چون مؤلفه‌های  $\vec{F}$  دارای مشتقهای پاره‌ای پیوسته مرتبه دوم فرض شده‌اند، شش جمله بالا دوبه‌دو حذف می‌شوند و حکم نتیجه می‌شود.

□

توجه کنید که هر دو حکم بالا دقیقاً بیانگر مجاز بودن تعویض ترتیب مشتقگیری برای تابعهای  $C^2$  هستند. می‌توان تعبیری شهودی از (۸) و (۹) ارائه داد. در مورد (۸)، میدان گرادیان میدانی است که تمایل گردشی ندارد زیرا که خطوط میدان همواره در جهت بیشترین افزایش تابع  $f$  حرکت می‌کنند. بنابراین  $\operatorname{curl}(\operatorname{grad}f)$ ، که میزان چرخش میدان  $\operatorname{grad}f$  است، صفر می‌شود. به همین ترتیب،  $\operatorname{curl}\vec{F}$  حالت چرخشی دارد، یعنی نه منبسط کننده و نه منقبض کننده است، بنابراین دیورژانس آن صفر می‌شود.

نماد زیر برای به یاد ماندن سه عملگر ذکر شده رویه مفید واقع می‌شود و به هر حال خلاصه‌نویسی

سودمندی است. اگر  $\nabla$  را به‌طور نمادین به صورت

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \quad (10)$$

بنویسیم، گرادیان  $f$  از نوشتن  $f$  در جوار مؤلفه‌های  $\nabla$  به دست می‌آید، یعنی:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) \quad (11)$$

اگر  $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$  یک میدان باشد، ضرب داخلی نمادین  $\nabla$  و  $\vec{F}$  برابر دیورژانس می‌شود:

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad (12)$$

و بالاخره ضرب خارجی نمادین  $\nabla$  و  $\vec{F}$ ، میدان  $\operatorname{curl}\vec{F}$  را به دست می‌دهد:

$$\nabla \times \vec{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right) \quad (13)$$

عملگرهای گرادیان، چرخه و دیورژانس هریک رابطه نزدیکی با مشتقگیری دارند. علاوه بر (۸) و (۹)، اتحادهای زیر نیز گاهی مورد استفاده قرار خواهد گرفت. بعضی از این اتحادها شباهت زیادی به قواعد مشتقگیری دارند. در زیر اعداد حقیقی ثابت با حروف  $a$  و  $b$ ، تابعهای با مقدار حقیقی با حروفی مانند  $f$  و  $g$ ، و میدانهای برداری با نمادهایی چون  $\vec{F}$  و  $\vec{G}$  نمایش داده شده‌اند. تابعها و میدانها مشتقپذیر فرض شده‌اند.

$$\nabla(af + bg) = a(\nabla f) + b(\nabla g) \quad (14)$$

$$\nabla(fg) = g(\nabla f) + f(\nabla g) \quad (15)$$

$$(g \neq 0) \quad \nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g(\nabla f) - f(\nabla g)}{g^2} \quad (16)$$

$$\nabla \cdot (a\vec{F} + b\vec{G}) = a(\nabla \cdot \vec{F}) + b(\nabla \cdot \vec{G}) \quad (17)$$

$$\nabla \cdot (f\vec{G}) = f(\nabla \cdot \vec{G}) + (\nabla f) \cdot \vec{G} \quad (18)$$

$$\nabla \cdot (\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot (\nabla \times \vec{F}) - \vec{F} \cdot (\nabla \times \vec{G}) \quad (19)$$

$$\nabla \times (a\vec{F} + b\vec{G}) = a(\nabla \times \vec{F}) + b(\nabla \times \vec{G}) \quad (20)$$

$$\nabla \times (f\vec{G}) = f(\nabla \times \vec{G}) + (\nabla f) \times \vec{G} \quad (21)$$

اثبات این اتحادها سراسر است و به خواننده واگذار می‌شود.

## آنالیز برداری (۲)

قضیه گرین انتگرال دوگانه عبارت  $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}$  روی یک ناحیه مسطح در صفحه را برحسب انتگرال  $\vec{F} \cdot d\vec{r}$  روی مرز ناحیه بیان می کنند. در نظر اول ممکن است عبارت  $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}$  مصنوعی به نظر رسد. ولی اگر  $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$  را در نظر بگیریم، عبارت بالا مؤلفه سوم میدان  $\text{curl} \vec{F}$  است. در واقع تعمیم مهمی از قضیه گرین به ناحیه های خمیده (تصویر رویه های قطعه قطعه هموار) وجود دارد که در آن به جای این عبارت از  $\text{curl} \vec{F}$  استفاده می شود. این قضیه را در زیر نخست در ساده ترین حالت در نظر می گیریم.

فرض کنید  $\varphi : W \rightarrow \mathbb{R}^3$  یک رویه هموار با شرایط اضافی زیر باشد:

الف)  $W$  دارای مرزی است که از یک یا چند (تعدادی متناهی) تصویر خم قطعه قطعه هموار تشکیل شده است.

ب)  $\varphi$  یک به یک است.

در این صورت  $D = \varphi(W)$  را یک رویه ساده می نامیم. مرز  $D$ ،  $\partial D$ ، برابر  $\varphi(\partial W)$  تعریف می شود.

مثال ۱ فرض کنید  $W = \{(u, v) \mid 0 \leq u \leq \pi, -1 \leq v \leq 1\}$  و  $\varphi : W \rightarrow \mathbb{R}^3$  به صورت زیر تعریف می شود:

$$\varphi(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$$

به سادگی دیده می شود که  $\varphi$  یک به یک است. داریم

$$\begin{aligned} \varphi_u \times \varphi_v &= (-\sin u, \cos u, 0) \times (0, 0, 1) \\ &= (\cos u, \sin u, 0) \end{aligned}$$

به ازای هر  $(u, v)$  داریم  $\varphi_u \times \varphi_v \neq \mathbf{0}$ ، پس  $\varphi$  یک رویه هموار تعریف می‌کند.  $D = \varphi(W)$  روی سطح استوانه  $x^2 + y^2 = 1$  دارد و نیمی از قطعه  $-1 \leq z \leq 1$ ، یعنی نیمه  $y \geq 0$  را دربرمی‌گیرد (شکل ۱). مرز  $D$  از دو پاره خط راست و دو نیمدایره تشکیل شده است.

شکل ۱

مثال ۲ فرض کنید

$$W = \{(u, v) \mid 1 \leq |u| + |v| \leq 2\}$$

$W$  ناحیه بین دو مربع در صفحه  $uv$  است (شکل ۲)

شکل ۲

حال  $\varphi: W \rightarrow \mathbb{R}^3$  را به صورت  $\varphi(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$  تعریف می‌کنیم.  $D = \varphi(W)$  قطعه ای از نمودار تابع  $z = x^2 + y^2$  است و می‌دانیم که نمودار یک تابع  $C^1$  تصویر یک رویه هموار است.  $\varphi$  در اینجا به وضوح یک به یک است. مرز  $D$  از دو خم تشکیل شده است که هر یک قطعه هموار و اجتماع چهار قطعه هموار است (شکل ۳).

شکل ۳

یادآوری می‌کنیم که برای رویه ساده  $D = \varphi(W)$  جهت قراردادی با قائم واحد

$$\vec{n} = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{|\varphi_u \times \varphi_v|}$$

تعریف می‌شود. همچنان که در مورد مرز یک ناحیه دوبعدی عمل کردیم، اکنون جهت مشخصی برای  $\partial D$  منظور می‌کنیم.

در هر نقطه مرزی غیر گوشه‌ای،  $\vec{t}$  را بردار واحدی می‌گیریم که بر رویه  $D$  مماس است، بر مرز یعنی  $\partial D$  عمود است و به درون  $D$  اشاره می‌کند. حال مماس واحد،  $\vec{T}$ ، در یک نقطه غیر گوشه‌ای را آن مماس واحد بر  $\partial D$  در آن نقطه می‌گیریم که  $(\vec{T}, \vec{v}, \vec{n})$  یک سه‌تایی مرتب راستگرد باشد. اگر

انسانی را تصور کنیم که روی  $\partial D$ ، در جهت  $\vec{T}$  حرکت می‌کند و دست چپ او به طرف درون  $D$  است، جهت سر این انسان متحرک باید به طرف قائم قراردادی روبه، یعنی  $\vec{n}$  باشد.

برای مثالهای ۱ و ۲،  $\vec{T}$  را محاسبه می‌کنیم. در مثال ۱ دیدیم که  $\vec{n} = (\cos u, \sin u, 0)$  روی قطعه افقی  $t = -1$  که با  $v = -1$  مشخص می‌شود، داریم  $\vec{v} = (0, 0, 1)$  پس

$$\vec{T} = \vec{v} \times \vec{n} = (-\sin u, \cos u, 0)$$

به همین ترتیب ملاحظه می‌کنیم که روی قطعه قائم متناظر با  $u = \pi$ ، داریم  $\vec{n} = (0, 0, 1)$  روی قطعه افقی متناظر با  $v = 1$ ،  $\vec{T} = (\sin u, -\cos u, 0)$  و بالاخره روی قطعه قائم متناظر با  $u = 0$   $\vec{T} = (0, 0, -1)$ .

در مثال ۲، قائم واحد عبارت است از:

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{|\varphi_u \times \varphi_v|} &= \frac{(1, 0, 2u) \times (0, 1, 2v)}{|(1, 0, 2u) \times (0, 1, 2v)|} \\ &= \frac{(-2u, -2v, 1)}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}} \end{aligned}$$

که قائم بر نمودار سهمی وار  $z = x^2 + y^2$  است که مؤلفه سوم آن مثبت است، یعنی به طرف 'داخل' سهمی وار، یعنی ناحیه  $z > x^2 + y^2$  اشاره دارد. نتیجه این که جهت  $\partial D$  طبق شکل ۱۰ می‌باشد. توجه کنید که اگر این جهت‌ها را بر صفحه  $xy$  (= صفحه  $uv$ ) تصویر کنیم (ناحیه شکل ۹)، مربع داخلی در جهت عقربه ساعت و مربع خارجی در جهت مثلثاتی جهت می‌گیرد که سازگار با جهت مرز در قضیه گرین است.

این در واقع کلیت دارد زیرا که  $\varphi_u$  تصویر  $(1, 0)$  تحت  $D\phi(u, v)$  است،  $\varphi_v$  تصویر  $(0, 1)$  تحت  $D\phi(u, v)$  است، پس  $\vec{n} = \frac{\vec{\varphi}_u \times \vec{\varphi}_v}{|\vec{\varphi}_u \times \vec{\varphi}_v|}$  و  $(\vec{\varphi}_u, \vec{\varphi}_v, \vec{n})$  مانند  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  راستگرد است. حال چون تحت  $\varphi$ ، درون  $W$  به درون  $D = \varphi(W)$  نگاشته می‌شود، جهت مرزها نیز متناظر خواهد شد. اکنون می‌توانیم قضیه استوکس را برای روبه‌های ساده بیان کنیم. در زیر مرز روبه طبق قرارداد بالا جهت داده شده است.

(۴۰-۲) قضیه استوکس (روبه‌های ساده)  $D = \varphi(W)$  یک روبه ساده در  $\mathbb{R}^3$  است که  $\varphi$  تابعی  $C^2$  است و مرز روبه،  $\partial D$ ، طبق قرارداد جهت داده شده است و  $\vec{n}$  قائم واحد قراردادی روی  $D$  می‌باشد،



اگر  $\vec{F}$  یک میدان برداری  $C^1$  باشد که دامنه تعریف آن شامل  $D$  و مرز آن است، داریم:

$$\int_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_D \int \text{curl} \vec{F} \cdot \vec{n} dS \quad (1)$$

برهان همان طور که انتظار می رود فرمول بالا با نوشتن  $(x, y, z)$  به صورت  $\varphi(u, v)$  و استفاده از قاعده زنجیره ای به فرمول گرین در صفحه  $uv$  برای  $W$  و  $\partial W$  تبدیل می شود. طبق معمول می نویسیم:

$$(x, y, z) = \vec{r} = \varphi(u, v) = (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v), \varphi_3(u, v))$$

نخست عبارت داخل انتگرال سمت چپ را بر حسب  $(u, v)$  می نویسیم:

$$\begin{aligned} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz \\ &= F_1 \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} dv \right) + F_2 \left( \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} dv \right) + F_3 \left( \frac{\partial \varphi_3}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi_3}{\partial v} dv \right) \end{aligned}$$

پس

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = (\vec{F} \cdot \vec{r}_u) du + (\vec{F} \cdot \vec{r}_v) dv$$

و طبق قضیه گرین در صفحه داریم

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_{\partial W} [(\vec{F}(\varphi(u, v)) \cdot \vec{r}_u) du + (\vec{F}(\varphi(u, v)) \cdot \vec{r}_v) dv] \\ &= \int \int_W \left[ \frac{\partial}{\partial u} (\vec{F}(\varphi(u, v)) \cdot \vec{r}_v) - \frac{\partial}{\partial v} (\vec{F}(\varphi(u, v)) \cdot \vec{r}_u) \right] dA \end{aligned}$$

عبارت داخل انتگرال را بسط می دهیم:

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\partial}{\partial u} (F_1 x_v + F_2 y_v + F_3 z_v) - \frac{\partial}{\partial v} (F_1 x_u + F_2 y_u + F_3 z_u) \right] dudv \\ &= \left[ \frac{\partial (F_1 \circ \varphi)}{\partial u} x_v + (F_1 \circ \varphi) x_{vu} - \frac{\partial (F_1 \circ \varphi)}{\partial v} x_u - (F_1 \circ \varphi) x_{uv} \right. \\ & \left. + (\text{دو دسته چهارتایی جملات مشابه}) \right] dudv \end{aligned}$$

چون مشتقات پاره ای مرتبه دوم  $\varphi$  پیوسته فرض شده اند داریم  $x_{vu} = x_{uv}$  و نصف جملات حذف

می‌شوند. با استفاده از قاعدهٔ زنجیره‌ای عبارت بالا برابر می‌شود با:

$$\begin{aligned} & \left[ \left( \frac{\partial F_1}{\partial x} x_u + \frac{\partial F_1}{\partial y} y_u + \frac{\partial F_1}{\partial z} z_u \right) x_v - \left( \frac{\partial F_1}{\partial x} x_v + \frac{\partial F_1}{\partial y} y_v + \frac{\partial F_1}{\partial z} z_v \right) x_u \right. \\ & \left. + (\text{دو دسته جملات مشابه}) \right] dudv \\ & = \left[ -\frac{\partial F_1}{\partial y} \cdot \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} + \frac{\partial F_1}{\partial z} \cdot \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \cdot \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} + \frac{\partial F_2}{\partial x} \cdot \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} - \frac{\partial F_2}{\partial x} \cdot \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \right. \\ & \left. + \frac{\partial F_2}{\partial y} \cdot \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \right] dudv \\ & = \left[ \left( \frac{\partial F_2}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} + \left( \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_2}{\partial x} \right) \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} + \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right] dudv \end{aligned}$$

■ که انتگرال عبارت بالا روی  $W$  دقیقاً برابر  $\int \int_D (\vec{F} \cdot \vec{n}) dS$  است و حکم به اثبات می‌رسد.

مثال ۱  $M$  را بخشی از نمودار  $z = f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$  می‌گیریم که در بالای صفحه  $xy$ ، یعنی در  $z \geq 0$  قرار دارد و  $\vec{n}$  را قائم واحد به طرف  $z$  های مثبت روی این رویه می‌گیریم. میدان  $\vec{F}$  به صورت زیر داده شده است:

$$\vec{F}(x, y, z) = (x - y)\vec{i} + (x + y^2)\vec{j} + z^2\vec{k}$$

می‌خواهیم  $\int \int_D \text{curl} \vec{F} \cdot \vec{n} dS$  را محاسبه کنیم.  $\partial D$  عبارت است از دایرهٔ واحد  $x^2 + y^2 = 1$ ،  $z = 0$ . با توجه به این که  $D$  به وسیله  $(u, v, 1 - u^2 - v^2) \mapsto (u, v)$ ،  $u^2 + v^2 \leq 1$ ، پرمایش می‌شود و قائم واحد عبارت است از:

$$\frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|} = \frac{(1, 0, -2u) \times (0, 1, -2v)}{|(1, 0, -2u) \times (0, 1, -2v)|} = \frac{(2u, 2v, 1)}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}}$$

که مؤلفهٔ  $z$  آن مثبت است و برای به کارگیری قضیه گرین برای  $u^2 + v^2 \leq 1$ ، باید مرز را در جهت مثلثاتی پرمایش کرد، جهت  $\partial D$  نیز باید جهت مثلثاتی در صفحه  $xy$  اتخاذ شود تا قضیهٔ استوکس برقرار گردد:

$$\int \int_D \text{curl} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \int_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

می‌توان در اینجا انتگرال سمت راست را محاسبه کرد ولی کار ساده‌تر این است که مجدداً قضیه استوکس را این بار برای رویه  $x^2 + y^2 \leq 1, z = 0$  به کار گیریم که نتیجه می‌دهد:

$$\begin{aligned} \int_{\partial M} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int \int_{x^2+y^2 \leq 1} (\text{curl} \vec{F} \cdot \vec{k}) dA \\ &= \int \int_{x^2+y^2 \leq 1} ((0 - 0)\vec{i} + (0 - 0)\vec{j} + (1 + 1)\vec{k}) \cdot \vec{k} dA \\ &= \int \int_{x^2+y^2 \leq 1} 2 dA = 2\pi \end{aligned}$$

برای بهره‌گیری کامل از قضیه استوکس لازم است که آن را به "رویه‌های بزرگتر"، یعنی رویه‌هایی که نتوان (یا به آسانی نتوان) آنها را به صورت رویه ساده پرمایش کرد تعمیم دهیم. زیرمجموعه  $D$  از  $\mathbb{R}^3$  را یک رویه جهت‌پذیر می‌نامیم در صورتی  $D = D_1 \cup \dots \cup D_k$  و شرایط زیر برقرار باشند:

(الف) هر  $D_i$  یک رویه ساده است.

(ب) دو  $D_i$  متمایز فقط در مرز می‌توانند اشتراک داشته باشند و  $D_i \cap D_j$  را می‌توان به صورت اجتماعی متناهی از تصاویر خم‌های هموار نوشت

(ج) هر قطعه خم مرزی  $D_i$  با حداکثر یک  $D_j, j \neq i$ ، مشترک است.

(د) برای  $D_i$  ها می‌توان طوری جهت اختیار کرد که جهت قراردادی مرز مشترک بین  $D_i$  و  $D_j$  متضاد باشد.

در شکل ۳ دو نمونه رویه جهت‌پذیر نمایش داده شده است. ۳ (الف) از چسباندن سه چنبره به هم به دست آمده است. از چنبره میانی دو قطعه و از هر یک چنبره‌های کناری یک قطعه بریده و در امتداد برش‌ها چنبره‌ها را به هم چسبانده‌ایم. به برقرار بودن شرط (د) توجه کنید. در شکل (ب) از استوانه افقی سه خم بسته  $\gamma_1, \gamma_2$  و  $\gamma_3$  را بریده‌ایم به طوری که  $D_1$  دارای مرزی متشکل از پنج خم بسته  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5$  است. در امتداد  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  و  $\gamma_4$  سه استوانه دیگر به  $D_1$  چسبانده‌ایم. سه خم  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  و جهت‌های متضاد از  $D_i$  ها می‌گیرند. مرز  $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$  از پنج قطعه  $\gamma_4, \gamma_5, \gamma_6, \gamma_7$  و  $\gamma_8$  با جهت نمایش داده شده تشکیل شده است. در ۳ (الف) مرز  $D$  تهی است. این نمونه یک رویه "جهت‌پذیر بسته" است.

### شکل ۳

در شکل ۴ "نوار مویبوس" نمایش داده شده است که جهت پذیر نیست. اگر دو سر یک نوار کاغذ را پس از یک دو تاب دادن در فضا به هم بچسبانیم نوار مویبوس حاصل می شود. این رویه را نمی توان به صورت یک رویه جهت پذیر نمایش داد.

### شکل ۴

مثلاً اگر دو برش  $cd$  و  $ef$  را طبق شکل ۵ انجام دهیم و روی هر یک از رویه حاصل شده جهتی اختیار کنیم

### شکل ۵

مشاهده می شود که بسته به جهت های اختیار شده، یکی از دو قطعه مرزی  $cd$  یا  $ef$  جهت های متوافق کسب می کنند و دیگری جهت متضاد. نمود دیگر جهت ناپذیری یک رویه در  $\mathbb{R}^3$  این است که نمی توان برای آن یک میدان برداری قائم واحد اختیار کرد که به طور پیوسته تغییر کند. مثلاً اگر در یک نقطه دایره نقطه چین شکل ۴ یک قائم واحد بر رویه اختیار کنیم و آن را یک دو کامل در طول این خم بسته به طور پیوسته دنبال کنیم، در بازگشت به نقطه آغازی جهت آن معکوس خواهد شد.

حال فرض کنید  $D = D_1 \cup \dots \cup D_k$  یک رویه جهت پذیر باشد و برای  $D_i$  ها جهت هایی طبق (د) اختیار کنید که خم های اشتراک جهت های متضاد کسب کنند. اگر فرمول استوکس را برای هر  $D_i$  بنویسیم و طرف های متناظر را با هم جمع کنیم، در طرف راست (۱)  $\int \int_D \text{curl} \vec{F} \cdot \vec{n} dS$  حاصل می شود و در طرف چپ کلیه مرزهای مشترک به دلیل جهت های متضاد حذف شده و تنها انتگرال  $\int \vec{F} \cdot d\vec{r}$  برای آن خم های مرزی باقی می ماند که متعلق به فقط یک قطعه هستند. این خم ها دقیقاً مرز  $D$  را تشکیل می دهند. در ضمن اگر رویه  $D$  بسته باشد، همه خم های مرزی مشترک هستند و مجموع انتگرال های سمت چپ صفر می شود. بدین ترتیب فرمول کلی استوکس به دست می آید:

(۴۰-۲) قضیه استوکس اگر  $D$  یک رویه جهت پذیر با مرز  $\partial D$  باشد و بردار قائم واحد و جهت  $\partial D$  به طور سازگار با قرارداد انتخاب شده باشند، برای هر میدان برداری با مشتق های پاره ای پیوسته  $\vec{F}$  که

دامنه آن شامل  $D$  و  $\partial D$  باشد داریم:

$$\int_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int \int_D \text{curl} \vec{F} \cdot \vec{n} dS \quad (2)$$

اگر رویه بسته نیز باشد، لزوماً:

$$\int \int_D \text{curl} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = 0 \quad (3)$$

مثال ۲ نمودار تابعی مشتق‌پذیر  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  استوانه  $x^2 + y^2 = 1$  را در خمی  $\gamma$  قطع می‌کند. میدان برداری  $\vec{F}(x, y, z) = (-y)\vec{i} + x\vec{j}$  را در نظر بگیرید. نشان دهید که  $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \pm 2\pi$  مستقل از تابع خاص  $f$ .

دو تابع مشتق‌پذیر مختلف  $f, g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  در نظر بگیرید که اشتراک نمودارشان با  $x^2 + y^2 = 1$  از یکدیگر مجزاست

### شکل ۶

ناحیه بین دو اشتراک روی سطح استوانه را  $D$  می‌نامیم. در شکل ۶ داریم  $\partial D = \beta \cup (-\alpha)$ ، که مقصود از  $(-\alpha)$  بازپرمایش جهت برگردان  $\alpha$  است. داریم  $\text{curl} \vec{F} = \underline{0}$ ، پس  $\int_{\beta} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{\alpha} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ ، یعنی همان طور که ادعا شده بود  $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$  مستقل از تابع خاص  $f$  است. بنابراین برای محاسبه  $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$  کافی است یک حالت خاص، مثلاً تابع ثابت  $f(x, y) \equiv 0$  در نظر گرفته شود که اشتراک نمودار آن با استوانه، دایره واحد در صفحه  $xy$  است. برای این دایره می‌دانیم که  $\int_{\gamma} -y dx + x dy = \pm 2\pi$  جهت  $\gamma$  مثلثاتی یا ضد مثلثاتی باشد.

### (۳-۴۰) کاربرد در وجود پتانسیل

به عنوان یک کاربرد قضیه گرین در صفحه دیدیم که هرگاه  $\vec{F} = F_1\vec{i} + F_2\vec{j}$  یک میدان برداری دارای مشتق‌های پاره‌ای پیوسته باشد که در مجموعه باز و همبند مسیری  $U$  در  $\mathbb{R}^2$  تعریف شده است و شرط لازم پایستگی  $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$  برقرار باشد،  $\vec{F}$  پایسته است در صورتی که  $U$  ویژگی هندسی اضافی

زیرا داشته باشد: برای هر خم ساده بسته قطعه قطعه هموار در  $U$ ، ناحیه محصور توسط این خم به تمامی در  $U$  واقع باشد. اکنون می‌توانیم با استفاده از قضیه استوکس تعمیم مناسبی برای این مطلب در  $\mathbb{R}^3$  ارائه کنیم.  $U$  را یک مجموعه باز و همبند مسیری در  $\mathbb{R}^3$  می‌گیریم و فرض می‌کنیم میدان برداری  $\vec{F}$ ، که دارای مشتق‌های پاره‌ای پیوسته است، در  $U$  تعریف شده است. شرطی لازم برای پایسته بودن  $\vec{F}$  این است که:

$$\text{curl} \vec{F} = \underline{0} \quad (4)$$

این شرط برای پایسته بودن  $\vec{F}$  کافی نیست زیرا که در مورد

$$\vec{F}(x, y, z) = \frac{-y}{x^2 + y^2} \vec{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \vec{j}$$

که در مجموعه باز و همبند مسیری  $U = \mathbb{R}^3 - \{ \text{محور } z \}$  تعریف شده است داریم  $\text{curl} \vec{F} = 0$  ولیکن انتگرال  $\int \vec{F} \cdot d\vec{r}$  روی دایره واحد در صفحه  $xy$  صفر نیست. ویژگی هندسی اضافی مورد نیاز در اینجا بدین شرح است: برای هر خم بسته ساده قطعه قطعه هموار  $\gamma$  در  $U$ ، روبه‌ای جهت‌پذیر  $D$ ، کاملاً واقع شده در  $U$  وجود داشته باشد که  $\partial D = \gamma$ .

در صورت احراز این شرط،  $\int_D \text{curl} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = 0$  نتیجه می‌دهد  $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$  برای هر خم ساده بسته قطعه قطعه هموار در  $U$ ، پس  $\vec{F}$  دارای پتانسیل است.

به عنوان مثال توجه کنید که  $\mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$  ویژگی مورد نظر را دارد زیرا که مثلاً برای هر خم بسته ساده حول  $z$  در صفحه  $xy$  می‌توان روبه‌ای در  $z > 0$  در نظر گرفت که  $\gamma$  را به عنوان مرز دارد. مثلاً نیمکره شمالی این ویژگی را دارد.

(4-40) تعبیر  $\text{curl}$  فرض کنید  $D_\rho$  یک گوی مسطح دو بعدی به شعاع  $\rho$  و به مرکز نقطه  $P$  در  $\mathbb{R}^3$  است.  $\vec{F}$  یک میدان برداری است با مشتق‌های پاره‌ای پیوسته، که دامنه آن شامل  $D_\rho$  و مرز آن است. طبق فرمول استوکس داریم:

$$\int_{\partial D_\rho} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int \int_{D_\rho} \text{curl} \vec{F} \cdot \vec{n} dS$$

با استفاده از قضیه میانگین انتگرال، انتگرال سمت راست برابر می‌شود با  $(\text{curl } \vec{F} \cdot \vec{n})(Q)$  که  $(\pi\rho^2)$  نقطه‌ای در  $D_\rho$  است. پس:

$$(\text{curl } \vec{F} \cdot \vec{n})(Q) = \frac{\int_{\partial D_\rho} \vec{F} \cdot d\vec{r}}{\pi\rho^2} \quad (5)$$

حال  $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$  گردش  $\vec{F}$  حول  $\gamma$  نام دارد زیرا که به مفهومی "مجموع" مؤلفه‌های  $\vec{F}$  در راستای مماس بر  $\gamma$  است. بدین ترتیب طرف راست (5) گردش متوسط  $\vec{F}$  نسبت به مساحت را حول  $P$  در صفحه عمود بر  $\vec{n}$  نمایش می‌دهد. وقتی  $\rho \rightarrow 0$ ، بنابر پیوستگی مشتق‌های پاره‌ای،  $(\text{curl } \vec{F} \cdot \vec{n})(Q)$  به  $(\text{curl } \vec{F} \cdot \vec{n})(P)$  میل می‌کند. بدین ترتیب تعبیر زیر برای  $\text{curl } \vec{F}$  حاصل می‌شود:  $\text{curl } \vec{F}(P)$  برداری است که تصویر آن روی هر راستا برابر گردش لحظه‌ای  $\vec{F}$  حول آن راستا نسبت به واحد مساحت است. چون حداکثر  $\text{curl } \vec{F} \cdot \vec{n}(P)$  وقتی به دست می‌آید که  $\vec{n}$  در راستای  $\text{curl } \vec{F}$  باشد، امتداد  $\text{curl } \vec{F}$  را محور چرخش لحظه‌ای  $\vec{F}$  در نقطه  $P$  می‌نامند. به علاوه  $|\text{curl } \vec{F}|$  نیز معمولاً سرعت زاویه‌ای لحظه‌ای این چرخش خوانده می‌شود. دلیل این نامگذاری مثال ساده‌ی زیر است:

مثال میدان  $\vec{F}(x, y, z) = -\omega y\vec{i} + \omega x\vec{j}$  را در نظر بگیرید. این میدان نمایش دهنده‌ی یک دوران حول محور  $z$  با سرعت زاویه‌ای ثابت  $\omega$  است. داریم:

$$\text{curl } \vec{F} = (0, 0, 2\omega) = (2\omega)\vec{k}$$

بدین ترتیب مشاهده می‌شود که امتداد  $\text{curl } \vec{F}$  در واقع محور چرخش است و ضریب  $\vec{k}$  دو برابر سرعت زاویه‌ای می‌باشد.

بدین ترتیب  $\text{curl } \vec{F}(P)$  تمایل میدان  $\vec{F}$  به حالت چرخشی حول  $P$  را نمایش می‌دهد و امتداد  $\text{curl } \vec{F}(P)$  محور بیشترین چرخش است. با این تعبیر می‌توان رابطه‌ی اساسی  $\text{curl}(\text{grad } f) = \underline{0}$  را بازبینی کرد. به یاد آورید که خطوط میدان  $\text{grad } f$  همواره در جهت بیشترین صعود  $f$  در حرکتند، پس خطوط میدان  $\text{grad } f$  تمایلی به بازگشت به نقطه‌ی شروع (چرخش) را ندارند که با  $\text{curl}(\text{grad } f) = \underline{0}$  سازگار است.

از این تعبیر باید با احتیاط و دقت استفاده کرد. به مثال زیر توجه کنید:

مثال میدان  $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{j}$  را در نظر می‌گیریم. این میدان روی صفحه  $yz$  صفر است و خارج از آن دارای خطوط میدان موازی محور  $y$  می‌باشد (شکل ۷ وضعیت میدان را در صفحه  $xy$  نشان می‌دهد).

### شکل ۷

به نظر نمی‌رسد هیچ‌گونه تمایلی به چرخش در این میدان وجود داشته باشد زیرا که خطوط میدان خارج از صفحه  $yz$  خط راست هستند. ولیکن محاسبه ساده نشان می‌دهد که  $\text{curl}\vec{F} = \vec{k}$ . چگونه باید این "تناقض" را توجیه کرد؟ یک راه توجیه این است که مشاهده کنیم در دو طرف صفحه  $yz$  جهت میدان عوض می‌شود. این امر به سبب صفر شدن میدان روی صفحه  $yz$  امکان‌پذیر است. می‌توان تصور کرد که در اینجا نوعی چرخش در جریان است که مسیر آن تا "بی‌نهایت" در امتداد محور  $y$  ادامه دارد. راه دیگر این است که یک چرخه سبک چهارپره‌ای را تصور کنیم که تحت تأثیر "میدان نیروی"  $\vec{F} = x\vec{j}$  قرار دارد. مثلاً اگر این چرخه در نیمه  $x > 0$  قرار داشته باشد، نیرویی که به پره‌های راست آن وارد می‌آید بزرگتر از نیرویی است که در همان جهت به پره‌های سمت چپ وارد می‌شود، پس چرخه دور خود خواهد چرخید. بدین ترتیب شاید بهتر باشد به جای این که  $\text{curl}\vec{F}$  را نمایشگر تمایل خود میدان  $\vec{F}$  به چرخش فرض کنیم، آن را نمایشگر توان میدان  $\vec{F}$  برای چرخاندن اشیاء سبکی که در معرض اثر آن قرار می‌گیرند تعبیر کنیم.